

# Vorlesungsskript Dynamische Systeme

Christoph Kawan  
Institut für Mathematik  
Universität Augsburg  
86159 Augsburg

E-mail: [christoph.kawan@math.uni-augsburg.de](mailto:christoph.kawan@math.uni-augsburg.de)

Datum: 22.01.2014

## Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundlegende Begriffe	6
3	Erste Beispiele	12
4	Rekurrenz	18
5	Symbolische Dynamik	27
6	Topologische Mischungseigenschaften und Chaos	36
7	Topologische Entropie	50
8	Literaturhinweise	75
9	Übungsaufgaben	75

Dies ist das Skript zu meiner Vorlesung *Dynamische Systeme*, die ich im Wintersemester 2013/14 an der Universität Augsburg gehalten habe. In der Vorlesung habe ich Aspekte der topologischen Theorie dynamischer Systeme behandelt, insbesondere Rekurrenz, topologische Mischungseigenschaften, symbolische Dynamik und topologische Entropie. Ich bedanke mich bei meinem Assistenten Ralph Lettau für die ausdauernde Unterstützung, sowie bei den Hörern der Vorlesung für ihre Geduld und ihr Feedback. Für Hinweise auf Fehler oder Ungenauigkeiten bin ich weiterhin dankbar.

## 1 Einführung

Die Theorie der dynamischen Systeme untersucht mathematische Modelle von Systemen der realen Welt, die sich nach bestimmten, quantitativ erfassbaren, Gesetzmäßigkeiten in der Zeit entwickeln.

Ursprünge:

- I. Newton (1641 – 1726): Gesetze der Mechanik, insbesondere Planetenbewegung
- H. Poincaré (1854 – 1912): Entwicklung von Methoden zur qualitativen Analyse dynamischer Systeme (ebenfalls Planetenbewegung, „ $n$ -Körper-Problem“)

Ein mathematisches Modell für ein dynamisches System muss beinhalten:

- (1) Ein Modell der Zeit
- (2) Ein Modell der Gesamtheit aller möglichen Zustände/Konfigurationen, die das System einnehmen kann
- (3) Eine Beschreibung des dynamischen Gesetzes, nach dem sich das System in der Zeit entwickelt

Eine allgemeine Definition, die sehr viele Fälle umfasst, sieht folgendermaßen aus:

**1.1 Definition:** *Ein dynamisches System ist gegeben durch eine Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X,$$

wobei  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\}$  und  $X$  eine nichtleere Menge ist, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(D1)  $\Phi(0, x) = x$  für alle  $x \in X$ .

(D2)  $\Phi(t + s, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$  für alle  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $x \in X$ .

Die Menge  $\mathbb{T}$  heißt die **Zeit** und die Menge  $X$  der **Zustandsraum** des Systems. Ist  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ , so spricht man von einem **zeit-diskreten System**, ansonsten von einem **zeit-kontinuierlichen System**.

Die Axiome (D1) und (D2) besagen, dass  $\Phi$  eine (Halb-)Gruppenwirkung der additiven (Halb-)Gruppe  $(\mathbb{T}, +)$  auf  $X$  ist.

Interpretation:  $\Phi(t, x)$  ist der Zustand des Systems zur Zeit  $t$ , falls sich das System zur Zeit 0 im Zustand  $x$  befindet. Axiom (D1) versteht sich damit von selbst. Axiom (D2) besagt, dass das dynamische Gesetz selbst zeitlich konstant ist. Es ist egal, ob man in  $x$  startet und die Zeit  $t + s$  verstreichen lässt, oder ob man zuerst die Zeit  $t$  verstreichen lässt, und dann mit  $\Phi(t, x)$  als neuem Anfangszustand um die Zeit  $s$  weitergeht. (Nach der Zeit  $t$  ist das dynamische Gesetz immer noch dasselbe wie zur Zeit 0.)

Im Gegensatz zu anderen mathematische Theorien, in denen Gruppenwirkungen untersucht werden, interessiert man sich in der Theorie der dynamischen Systeme vor allem für das asymptotische Verhalten für  $t \rightarrow (\pm)\infty$ . Um dieses zu beschreiben, macht man sich verschiedene mögliche Strukturen auf dem Zustandsraum  $X$  zunutze, was zu verschiedenen Subtheorien führt:

- (1) *Ergodentheorie*:  $X$  ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\Phi$  eine messbare Abbildung, so dass jede der *Zeit- $t$ -Abbildungen*  $\Phi_t = \Phi(t, \cdot) : X \rightarrow X$  das Wahrscheinlichkeitsmaß erhält. (Dies ist eine Abstraktion der hamiltonschen Systeme aus der Mechanik, denn diese sind volumenerhaltend.)
- (2) *Topologische Dynamik*:  $X$  ist ein topologischer Raum und  $\Phi$  ist stetig. Eine besonders reichhaltige und aussagekräftige Theorie ergibt sich, wenn  $X$  ein kompakter metrischer Raum ist. Mit solchen dynamischen Systemen werden wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen.
- (3) *Differenzierbare Dynamik*:  $X$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\Phi$  ist differenzierbar. Die differenzierbare Struktur erlaubt es, auf relativ einfache Art und Weise numerische Invarianten einzuführen (durch Anwendung von linearer Algebra auf die Ableitung  $D\Phi_t(x)$ ).

Die drei Theorien sind eng miteinander verknüpft. Zum Beispiel lässt sich zeigen, dass jedes topologische System auf einem kompakten Raum mindestens ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß invariant lässt (Satz von Krylov-Bogolyubov). Differenzierbare Systeme sind in natürlicher Weise auch topologische Systeme. Besonders interessant sind hier diejenigen Systeme, die ein Lebesgue-Maß (bzw. Volumen) invariant lassen.

Bezüge zu anderen mathematischen Theorien:

- (1) *Gewöhnliche Differentialgleichungen* der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f \text{ Lipschitz-stetiges Vektorfeld.}$$

Der Fluss einer solchen Differentialgleichung ist ein dynamisches System, falls jede Lösung für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  existiert. Ist  $f$  ein Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, so gilt dies automatisch.

- (2) *Partielle Differentialgleichungen:* Viele PDEs liefern dynamische Systeme auf unendlich-dimensionalen Zustandsräumen. (Beispiel: Wärmeleitungsgleichung, Zustand = Temperaturverteilung)
- (3) *Stochastische Differentialgleichungen:* Unter geeigneten Voraussetzungen erzeugen stochastische Differentialgleichungen sogenannte *zufällige dynamische Systeme*. Dies sind messbare dynamische Systeme der Form

$$\Phi : \mathbb{R} \times (\Omega \times X) \rightarrow \Omega \times X, \quad (t, (\omega, x)) \mapsto (\Theta_t(\omega), \varphi(t, \omega, x)),$$

wobei  $\Theta : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$  auch ein dynamisches System ist, welches ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  erhält. Systeme dieser Form werden auch als *Schiefprodukte* bezeichnet.

- (4) *Kontrolltheorie:* Hier geht es darum auf zeitliche Prozesse steuernd bzw. regelnd einzuwirken. Ein Kontrollsystem ist in diskreter Zeit gegeben durch Gleichungen der Form

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad u_k \in U,$$

und in kontinuierlicher Zeit durch Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \quad (+\text{Regularitätsvoraussetzung}).$$

Die Funktion  $u(\cdot)$  wird als Steuerung interpretiert. Verschiedene solche Funktionen führen zu unterschiedlichen Trajektorien. Unter geeigneten Voraussetzungen erhält man ein dynamisches System, das ein Schiefprodukt ist, wobei die Menge  $\Omega$  hier die Menge der zulässigen Steuerungen  $u(\cdot)$  ist und die Dynamik auf dieser Menge gegeben ist durch  $(t, u) \mapsto u(\cdot + t)$ .

- (5) *Riemannsche Geometrie:* Dynamische Systeme treten in der Riemannschen Geometrie an verschiedenen Stellen auf. Eine wichtige Rolle spielt z.B. der *geodätische Fluss* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , der ein dynamisches System auf dem Tangentialbündel von  $M$  darstellt. Er wird erzeugt durch die Lösungen der Geodätengleichung

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,$$

und das dynamische Verhalten dieses Flusses steht in engem Zusammenhang zu den Krümmungseigenschaften der Mannigfaltigkeit. (Ein anderes prominentes Beispiel ist der sogenannte *Ricci-Fluss*, der eine entscheidende Rolle beim Beweis der Poincaré-Vermutung gespielt hat.)

- (6) *Zahlentheorie:* Hier gibt es tiefe Zusammenhänge mit Resultaten der Ergodentheorie.

## 2 Grundlegende Begriffe

Wir werden uns in dieser Vorlesung im Wesentlichen auf die Untersuchung zeitdiskreter topologischer Systeme auf kompakten Zustandsräumen beschränken.

**2.1 Definition:** Ein (topologisches) dynamisches System (TDS) ist ein Paar  $(X, f)$ , wobei  $X$  ein kompakter metrischer Raum ist und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung.

**2.2 Bemerkung:** Die Metrik auf  $X$  werden wir meistens mit  $d$  bezeichnen, aber in der Notation nicht mit anführen. Das ist dadurch gerechtfertigt, dass unsere Begriffe und Resultate rein topologischer Natur sein werden und damit unabhängig von der Wahl der Metrik innerhalb einer gegebenen Klasse von Metriken, die alle dieselbe Topologie erzeugen.

Inwiefern liefert diese Definition ein dynamisches System im Sinne der vorherigen Abschnitts?

Um diese Frage zu beantworten, führen wir die *Iterierten* einer Abbildung  $f : X \rightarrow X$  ein:

$$f^0 := \text{id}_X, \quad f^{n+1} := f \circ f^n, \quad n \geq 0,$$

bzw.

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n.$$

Ist  $f$  invertierbar, so definieren wir darüberhinaus

$$f^{-n} := (f^{-1})^n, \quad n \geq 1.$$

Beachte: Ist  $f$  invertierbar, so ist  $f^{-1}$  automatisch stetig, also ist  $f$  ein Homöomorphismus (Übungsaufgabe 2 auf Blatt 1). Ist  $f$  nicht invertierbar, so verstehen wir  $f^{-n}$  als Mengenoperator, d.h.  $f^{-n}(A)$  ist das Urbild der Menge  $A$  unter der Abbildung  $f^n$ .

Nun betrachten wir die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X, \quad (n, x) \mapsto f^n(x),$$

wobei  $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ , falls  $f$  nicht invertierbar ist und  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  andernfalls. Dies ist ein dynamisches System, denn

- $\Phi(0, x) = f^0(x) = \text{id}_X(x) = x$  nach Definition.
- $\Phi(n + m, x) = f^{n+m}(x) = f^m(f^n(x)) = \Phi(m, \Phi(n, x))$ .

Umgekehrt kann man einem dynamischen System  $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  mit diskreter Zeit  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$  die Abbildung  $\Phi_1 : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto \Phi(1, x)$ , zuordnen. Aus Axiom

(D2) folgt dann  $\Phi(n, x) = \Phi_1^n(x)$  für alle  $n \in \mathbb{T}$  und  $x \in X$ . Also entsprechen sich zeit-diskrete dynamische Systeme und (Selbst-)Abbildungen eins-zu-eins.<sup>1</sup>

**2.3 Bemerkung:** Eigentlich müssten wir in der Definition eines TDS noch die Zeitmenge  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$  mit angeben um das System genau zu benennen. Denn auch für invertierbare  $f$  könnten wir das System nur in Vorwärtszeit betrachten.

**2.4 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Für jedes  $x \in X$  heißt die Menge

$$\mathcal{O}^+(x) := \{f^n(x) : n \geq 0\}$$

der **Vorwärtsorbit von  $f$  durch  $x$** . Ist  $f$  invertierbar, so definieren wir zudem den **vollen Orbit durch  $x$**  als

$$\mathcal{O}(x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Folge  $x_n := f^n(x)$ ,  $n \geq 0$ , heißt die **Trajektorie durch  $x$** .

**2.5 Bemerkung:** Ist  $f$  invertierbar, so bilden die vollen Orbits von  $f$  eine disjunkte Zerlegung von  $X$ , wie dies bei jeder Gruppenwirkung der Fall ist. Für die Vorwärtsorbits ist dies allerdings im Allgemeinen nicht der Fall (Übungsaufgabe 3 auf Blatt 1).

Wie bereits im ersten Abschnitt erwähnt, interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten der Trajektorien für  $n \rightarrow \pm\infty$ . Ein wohlbekanntes Resultat aus der Analysis liefert ein erstes Beispiel.

**2.6 Satz (Banachscher Fixpunktsatz):** Ist  $(X, f)$  ein TDS und  $f$  eine Kontraktion, also

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X$$

mit einer Konstante  $K \in [0, 1)$ , so konvergiert  $f^n(x)$  für jedes  $x \in X$  gegen einen eindeutigen Fixpunkt  $x^* \in X$  von  $f$ .

Der Banachsche Fixpunktsatz gilt auch, wenn  $(X, d)$  nur ein vollständiger metrischer Raum ist. Kompakte Räume sind stets vollständig (Übungsaufgabe 1 auf Blatt 1).<sup>2</sup> Der Banachsche Fixpunktsatz passt nicht so ganz in die topologische Theorie dynamischer Systeme, da die Eigenschaft einer Abbildung kontrahierend zu sein, von der Wahl der Metrik abhängt.

<sup>1</sup>Durch die Einschränkung auf zeit-diskrete Systeme verlieren wir im Grunde nichts. Jedes zeit-kontinuierliche System lässt sich diskretisieren und dabei geht keine wesentliche Information verloren. Zeit-diskrete Systeme können interessanter sein als zeit-kontinuierliche, denn bei letzteren haben wir die Einschränkung, dass alle Zeit- $t$ -Abbildungen  $\Phi_t : X \rightarrow X$  notwendigerweise homotop zur Zeit-0-Abbildung, also zur Identität, sind.

<sup>2</sup>Beachte: Vollständigkeit ist im Gegensatz zu Kompaktheit keine topologische Eigenschaft. Sie hängt von der Wahl der Metrik ab. Ein kompakter Raum bleibt kompakt, wenn man eine andere Metrik wählt, die dieselbe Topologie erzeugt.

**2.7 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Gilt für einen Punkt  $x \in X$ , dass  $f(x) = x$ , so nennen wir  $x$  einen **Fixpunkt** von  $f$ . Gilt  $f^n(x) = x$  für ein  $n \geq 1$ , so nennen wir  $x$  einen  **$n$ -periodischen Punkt** von  $f$ , und den Vorwärtsorbit  $\mathcal{O}^+(x)$  **periodisch**. Das kleinste  $n \geq 1$  mit dieser Eigenschaft heißt die **Primperiode** von  $x$ . Die Menge aller Fixpunkte von  $f$  bezeichnen wir mit  $\text{Fix}(f)$  und die Menge aller  $n$ -periodischen Punkte mit  $\text{Per}_n(f)$ . Ferner betrachten wir die Menge  $\text{Per}(f) := \bigcup_{n \geq 1} \text{Per}_n(f)$  aller periodischen Punkte.

Der Vorwärtsorbit eines periodischen Punktes mit Primperiode  $n$  besteht aus genau  $n$  Punkten. Im invertierbaren Fall stimmt der Vorwärtsorbit eines periodischen Punktes mit dem vollen Orbit überein. In diesem Fall sind alle endlichen Orbits periodisch.

**2.8 Satz:** Ist  $(X, f)$  ein TDS und  $f$  invertierbar, so ist jeder endliche Vorwärtsorbit von  $f$  periodisch.

**Beweis:** Wir zeigen, dass jeder nicht-periodische Orbit aus unendlich vielen Punkten besteht. Wir nehmen also an, dass  $f^n(x) \neq x$  für alle  $n \geq 1$ . Dann gilt auch  $f^n(x) \neq f^m(x)$  für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq m$ . In der Tat, sei o.B.d.A.  $n > m$ . Dann folgt aus  $f^n(x) = f^m(x)$  durch Anwendung von  $f^{-m}$  auf beiden Seiten, dass

$$f^{n-m}(x) = f^{-m}(f^n(x)) = f^{-m}(f^m(x)) = x$$

und  $n - m \geq 1$  im Widerspruch zur Annahme. Sind aber alle  $f^n(x)$  paarweise verschieden, so kann  $\mathcal{O}^+(x)$  nicht endlich sein.  $\square$

Das Argument des Beweises funktioniert nicht, wenn  $f$  nicht invertierbar ist. In der Tat kann es nicht-periodische endliche Vorwärtsorbits geben, falls  $f$  nicht injektiv ist.

**2.9 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ein nicht-periodischer Punkt  $x \in X$  heißt **schließlich periodisch**, falls ein  $m \geq 1$  existiert, so dass  $f^m(x)$  ein periodischer Punkt ist.

**2.10 Beispiel:** Betrachte die Abbildung  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ , die durch  $f(0) := 0$  und  $f(1) := 0$  gegeben ist. Offensichtlich ist 0 ein Fixpunkt (und damit periodisch). Der Vorwärtsorbit von 1 ist gegeben durch  $\mathcal{O}^+(1) = \{1, 0\}$ , aber er ist nicht periodisch, da  $f^n(1) = 0$  für alle  $n \geq 1$ . Also ist 1 ein schließlich periodischer Punkt.

**2.11 Satz:** Ist  $(X, f)$  ein TDS, so ist jeder endliche Vorwärtsorbit von  $f$  periodisch oder schließlich periodisch.

**Beweis:** Sei  $x$  ein Punkt mit endlichem Vorwärtsorbit. Dann können die Punkte  $f^n(x)$ ,  $n \geq 1$ , nicht paarweise verschieden sein. Also existieren  $n > m \geq 1$  mit

$f^n(x) = f^m(x)$ . Wir schreiben  $n = m + k$  mit  $k = n - m \geq 1$  und  $y = f^m(x)$ . Dann gilt also

$$f^k(y) = f^k(f^m(x)) = f^{m+k}(x) = f^n(x) = f^m(x) = y.$$

Also ist  $f^m(x)$  ein  $k$ -periodischer Punkt und damit  $x$  schließlich periodisch oder periodisch.  $\square$

Wir haben damit alle Punkte mit endlichen Orbits klassifiziert und deren asymptotisches Verhalten verstanden. Insbesondere wissen wir, dass es nur periodische und schließlich periodische Orbits geben kann, falls der Zustandsraum  $X$  eine endliche Menge ist. Um das asymptotische Verhalten beliebiger Trajektorien zu verstehen, müssen wir weitere Begriffe einführen.

**2.12 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt

- (i) **vorwärtsinvariant**, falls  $f(A) \subset A$ ,
- (ii) **rückwärtsinvariant**, falls  $f^{-1}(A) \subset A$ ,
- (iii) **total invariant**, falls  $A$  vorwärts- und rückwärtsinvariant ist,
- (iv) **strikt vorwärtsinvariant**, falls  $f(A) = A$ ,
- (v) **strikt rückwärtsinvariant**, falls  $f^{-1}(A) = A$ .

**2.13 Bemerkung:** Eine total invariante Menge ist nicht notwendigerweise strikt vorwärtsinvariant. Ist z.B.  $f : X \rightarrow X$  nicht surjektiv, so ist  $f(X) \subset X$  und  $f^{-1}(X) = X$ , aber  $f(X) \neq X$ . Der folgende Satz liefert ein paar Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Invarianzbegriffen.

**2.14 Satz:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann gilt:

- (i) Jede total invariante Menge ist strikt rückwärtsinvariant.
- (ii) Ist  $f$  injektiv, so ist jede strikt vorwärtsinvariante Menge auch strikt rückwärtsinvariant.
- (iii) Ist  $f$  surjektiv, so ist jede total invariante Menge strikt vorwärtsinvariant.
- (iv) Ist  $A$  eine vorwärtsinvariante Menge, so auch  $\bar{A}$ .
- (v) Ist  $f$  invertierbar und  $A$  eine rückwärtsinvariante Menge, so auch  $\bar{A}$ .

**Beweis:** Zu (i): Es gelte  $f(A) \subset A$  und  $f^{-1}(A) \subset A$ . Dann folgt  $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(A)$ , also  $f^{-1}(A) = A$ . Zu (ii): Es gelte  $f(A) = A$ . Dann folgt wegen der Injektivität  $A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A)$ . Zu (iii): Ist  $f$  surjektiv und  $A$  total invariant, so folgt  $f(A) \subset A$  und  $A = f(f^{-1}(A)) \subset f(A)$ , also  $f(A) = A$ . Punkt (iv) folgt direkt aus der Stetigkeit von  $f$ . Punkt (v) folgt analog aus der Stetigkeit von  $f^{-1}$ . (Beachte, dass  $f$  automatisch ein Homöomorphismus ist, wenn  $f$  invertierbar ist.)  $\square$

**2.15 Bemerkung:** Beispiele für vorwärtsinvariante Mengen sind  $\text{Per}_n(f)$  und  $\text{Per}(f)$ . Der Abschluss  $\overline{\text{Per}(f)}$  ist eine kompakte vorwärtsinvariante Menge.

**2.16 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS und  $x \in X$ . Die Menge

$$\omega(x) = \omega(x, f) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} \{f^m(x)\}}$$

heißt die  $\omega$ -Limesmenge von  $x$ . Ist  $f$  invertierbar, so definieren wir zudem die  $\alpha$ -Limesmenge von  $x$  durch

$$\alpha(x) = \alpha(x, f) := \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} \{f^{-m}(x)\}}.$$

**2.17 Satz:** Die  $\omega$ -Limesmenge eines Punktes  $x$  ist die Menge der Häufungswerte der Trajektorie  $(f^n(x))_{n \geq 0}$ . Sie ist nichtleer, kompakt und strikt vorwärtsinvariant. Ist  $f$  invertierbar, so ist  $\omega(x)$  auch rückwärtsinvariant. Ferner gelten dann die analogen Aussagen für die  $\alpha$ -Limesmenge.

**Beweis:** Sei  $y$  ein Häufungswert von  $x_n = f^n(x)$ . Dann existiert eine streng monoton wachsende Folge  $m_n \rightarrow \infty$  mit  $f^{m_n}(x) \rightarrow y$ . Damit liegt  $y$  für jedes  $m \geq 1$  im Abschluss der Menge  $\bigcup_{m \geq n} \{f^m(x)\}$ , also in  $\omega(x)$ . Ist umgekehrt  $y \in \omega(x)$ , so gibt es für jedes  $n \geq 1$  ein Element  $f^{m_n}(x) \in \bigcup_{m \geq n} \{f^m(x)\}$  mit  $d(f^{m_n}(x), y) < 1/n$ . Wir können jedes einzelne  $m_n$  beliebig groß wählen und damit erreichen, dass  $m_n$  streng monoton wächst. Dann ist  $f^{m_n}(x)$  eine Teilfolge von  $f^n(x)$  und es gilt  $f^{m_n}(x) \rightarrow y$ . Also ist  $y$  ein Häufungswert von  $(f^n(x))_{n \geq 0}$ .

Dass  $\omega(x)$  nichtleer ist, folgt aus der Kompaktheit von  $X$ . (Jede Folge in  $X$  hat einen Häufungswert.) Aus der Definition von  $\omega(x)$  folgt, dass  $\omega(x)$  abgeschlossen ist, als Schnitt abgeschlossener Mengen. Als Teilmenge des kompakten Raums  $X$  ist  $\omega(x)$  damit kompakt. Die Vorwärtsinvarianz sieht man wie folgt: Sei  $y \in \omega(x)$ . Dann gilt  $f^{m_n}(x) \rightarrow y$  für eine streng monotone Folge  $m_n \rightarrow \infty$ . Da  $f$  stetig ist, gilt

$$f^{m_n+1}(x) = f(f^{m_n}(x)) \rightarrow f(y).$$

Also ist  $f(y) \in \omega(x)$ . Um zu zeigen, dass  $\omega(x)$  sogar strikt vorwärtsinvariant ist, sei  $y \in \omega(x)$ , also  $f^{m_n}(x) \rightarrow y$  für eine streng monotone Folge  $m_n \rightarrow \infty$ . Die Folge  $x_n := f^{m_n-1}(x)$  hat wegen der Kompaktheit von  $X$  einen Häufungswert  $z$ , also gilt  $x_{n_k} \rightarrow z \in \omega(x)$  ( $k \rightarrow \infty$ ) für eine Teilfolge. Damit erhalten wir

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_{n_k}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(f^{m_{n_k}-1}(x)) = f \left( \lim_{k \rightarrow \infty} f^{m_{n_k}-1}(x) \right) = f(z).$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $y \in f(\omega(x))$ . Also gilt  $\omega(x) \subset f(\omega(x))$ .

Ist  $f$  invertierbar,  $y \in \omega(x)$  mit  $f^{m_n}(x) \rightarrow y$  und  $z = f^{-1}(y)$ , so folgt  $f^{m_n-1}(x) = f^{-1}(f^{m_n}(x)) \rightarrow z$ , also ist  $\omega(x)$  rückwärtsinvariant. Die entsprechenden Aussagen für die  $\alpha$ -Limesmenge ergeben sich durch Betrachtung des Systems  $(X, f^{-1})$ .  $\square$

**2.18 Bemerkung:** In der Definition von  $\omega$ -Limesmengen kann man  $x$  auch durch eine Menge  $A \subset X$  ersetzen.

**2.19 Bemerkung:** Die  $\omega$ -Limesmenge eines schließlich periodischen Punktes ist der zugehörige periodische Orbit.

Wie in jeder mathematischen Theorie stellt sich in der topologischen Dynamik die Frage nach der Klassifikation der untersuchten Objekte (*Klassifikationsproblem*). Die folgende Definition liefert die passende Äquivalenzrelation.

**2.20 Definition:** Seien  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSe. Existiert ein Homöomorphismus  $h : X \rightarrow Y$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

kommutiert, so heißen die Systeme **topologisch konjugiert** und  $h$  heißt **topologische Konjugation**. Ist  $h$  in obigem Diagramm nur eine stetige surjektive Abbildung, so sprechen wir von einer **topologischen Semikonjugation**. In diesem Fall heißt  $(Y, g)$  ein **topologischer Faktor** von  $(X, f)$  und  $(X, f)$  eine **topologische Erweiterung** von  $(Y, g)$ .

Es ist klar, dass topologische Konjugiertheit eine Äquivalenzrelation darstellt. Jedes System  $(X, f)$  ist mittels der Identität  $\text{id}_X$  zu sich selbst konjugiert (Reflexivität). Gilt  $h \circ f = g \circ h$ , so folgt  $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$  (Symmetrie). Und schließlich folgt aus  $h \circ f_1 = f_2 \circ h$  und  $k \circ f_2 = f_3 \circ k$ , dass  $(k \circ h) \circ f_1 = f_3 \circ (k \circ h)$  (Transitivität).

Aus der Konjugiertheit von  $f$  und  $g$  folgt auch die der Iterierten  $f^n$  und  $g^n$  für beliebige  $n \geq 0$ :

$$h \circ f^n = g \circ h \circ f^{n-1} = g^2 \circ h \circ f^{n-2} = \dots = g^n \circ h.$$

Sind  $f$  und  $g$  invertierbar, so folgt aus  $h \circ f = g \circ h$  durch Anwendung von  $g^{-1}$  von links und  $f^{-1}$  von rechts, dass  $h \circ f^{-1} = g^{-1} \circ h$ .

**2.21 Satz:** Seien  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSe.

- (i) Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine topologische Konjugation. Dann gilt: Ist  $x \in X$  ein periodischer Punkt von  $f$  mit Primperiode  $n$ , so ist  $h(x) \in Y$  ein periodischer Punkt von  $g$  mit derselben Primperiode. Ferner gilt  $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$  für alle  $x \in X$ .
- (ii) Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine topologische Semikonjugation. Dann gilt: Ist  $x \in X$  ein periodischer Punkt von  $f$ , so ist  $h(x)$  ein periodischer Punkt von  $g$  (aber nicht notwendigerweise mit derselben Primperiode). Ferner gilt ebenfalls  $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$  für alle  $x \in X$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe 1 auf Blatt 2. □

### 3 Erste Beispiele

Wir wollen im Folgenden einige Beispiele für topologische dynamische Systeme einführen, die wir im Laufe der Vorlesung immer wieder heranziehen werden, um neue Begriffe zu veranschaulichen und die Theorie zu testen.

Eine reichhaltige und sehr gut verstandene Beispielklasse bilden die Systeme auf eindimensionalen Zustandsräumen (kompaktes Intervall  $I = [0, 1]$  oder Kreis  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ). Die ersten Beispiele werden von dieser Art sein.

**3.1 Beispiel:** Sei  $I = [0, 1]$  das kompakte Einheitsintervall und  $f : I \rightarrow I$  ein streng monoton wachsender Homöomorphismus. Dann hat  $f$  mindestens zwei Fixpunkte, nämlich 0 und 1, da  $f$  ansonsten nicht surjektiv sein könnte. Jede Trajektorie von  $f$  konvergiert gegen einen Fixpunkt (nicht notwendigerweise 0 oder 1). Dies sieht man wie folgt: Ist  $x \in I$ , so gibt es drei Möglichkeiten:  $f(x) = x$ ,  $f(x) < x$  oder  $f(x) > x$ . Im ersten Fall ist  $x$  bereits selbst ein Fixpunkt. Im zweiten Fall folgt wegen der strengen Monotonie induktiv, dass  $f^{n+1}(x) < f^n(x)$  für alle  $n \geq 0$ . Also ist  $(f^n(x))_{n \geq 0}$  eine streng monoton fallende nach unten beschränkte Folge, die folglich gegen ein  $x^*$  konvergiert. Nach Übungsaufgabe 4 auf Blatt 1 folgt, dass  $x^*$  ein Fixpunkt ist. Analog argumentiert man im Fall  $f(x) > x$ .<sup>3</sup>

Das nächste Beispiel zeigt, dass es auf dem Einheitskreis Homöomorphismen mit interessanterer Dynamik gibt.

**3.2 Beispiel:** Sei  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  der Einheitskreis, aufgefasst als Teilmenge der komplexen Zahlenebene. Für jedes  $c \in S^1$  definieren wir die Abbildung

$$f_c : S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto cz.$$

Geometrisch ist  $f_c$  nichts anderes als eine Rotation um den Winkel  $\varphi$ , wenn  $c = e^{2\pi i \varphi}$ . Es ist damit klar, dass  $f_c$  ein Homöomorphismus ist. Die Umkehrabbildung ist  $f_{c^{-1}}$ . Wir wollen zeigen, dass je nachdem ob  $\varphi$  rational oder irrational ist, jeder volle Orbit von  $f_c$  periodisch (mit der gleicher Periode) ist oder dicht in  $S^1$  liegt.

Zunächst betrachten wir den Fall  $\varphi = p/q \in \mathbb{Q}$ . Dann gilt

$$f_c^n(z) = c^n z = e^{2\pi i \frac{np}{q}} z.$$

Insbesondere gilt also  $f_c^q(z) = e^{2\pi i p} z = z$ . Also ist  $z$  ein  $q$ -periodischer Punkt und dies gilt für jedes  $z \in S^1$ . Sind  $p$  und  $q$  teilerfremd gewählt, so ist  $q$  die Primperiode.

---

<sup>3</sup>Streng monoton fallende Homöomorphismen auf  $[0, 1]$  sind ähnlich einfach zu verstehen. Hier gibt es neben den Fixpunkten noch 2-periodische Orbits (Übungsaufgabe 3 auf Blatt 2).

Nun sei  $\varphi$  irrational. Um zu zeigen, dass jeder volle Orbit dicht in  $S^1$  liegt, verwenden wir ein Volumenargument. Als Rotation ist  $f_c$  natürlich eine Isometrie, d.h.  $f$  erhält die Länge von Intervallen in  $S^1$ . Nehmen wir an, dass  $\{f_c^n(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  nicht dicht in  $S^1$  ist, so existiert ein Teilintervall  $J_0 \subset S^1$  mit positiver Länge, das keinen der Punkte  $f_c^n(z)$  enthält. Wir wählen  $J$  als das maximale Intervall mit derselben Eigenschaft, das  $J_0$  enthält, also als die Vereinigung aller Intervalle  $I$  mit  $J_0 \subset I$ , so dass  $I \cap \mathcal{O}(z) = \emptyset$ . Dann enthält auch keine der Mengen  $f_c^n(J)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , einen Punkt der Form  $f_c^n(z)$ . Wegen der Maximalität von  $J$  und der Längenerhaltung muss das Intervall  $f_c^n(J)$  für  $n \neq 0$  disjunkt von  $J$  sein oder mit  $J$  identisch. Gilt letzteres, so können wir die Abbildung  $f_c^n|_J : J \rightarrow J$  betrachten. Gehen wir zum Abschluss von  $J$  über, der sicherlich nicht ganz  $S^1$  ist, da  $\#\mathcal{O}(z) \geq 2$ , bekommen wir eine stetige Abbildung des kompakten Intervalls  $\bar{J}$  in sich. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz in einer Dimension hat diese einen Fixpunkt, also gilt  $f_c^n(z^*) = z^*$  für ein  $z^* \in \bar{J}$ , was äquivalent zu  $c^n = 1$  oder  $n\varphi \in \mathbb{Z}$  ist. Dies widerspricht der Irrationalität von  $\varphi$ . Folglich müssen die Intervalle  $f_c^n(J)$  paarweise disjunkt sein. Da diese aber alle die gleiche positive Länge haben, ist das ein Widerspruch.

**3.3 Bemerkung:** Ein System, dessen Orbits (Vorwärtsorbits für nichtinvertierbare oder volle Orbits für invertierbare Systeme) alle dicht im Zustandsraum liegen, nennt man auch *minimal*, und zwar deshalb, weil ein solches System keine nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Mengen haben kann.

**3.4 Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, 1/2], \\ 2 - 2x & \text{falls } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Wegen der Form ihres Graphen wird diese Abbildung auch als *Zelt-Abbildung* bezeichnet. Sie ist ein Spezialfall einer sogenannten *unimodalen* oder *eingipfligen* Intervallabbildung.<sup>4</sup> Wie wir noch sehen werden, liefert die Zeltabbildung ein Beispiel für ein dynamisches System mit sehr kompliziertem (chaotischem) Verhalten. Zunächst einmal wollen wir versuchen die periodischen und schließlich periodischen Punkte von  $f$  zu bestimmen. Es ist leicht zu sehen, dass  $f$  zwei Fixpunkte hat, nämlich

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ein zwei-periodischer Orbit von  $f$  ist gegeben durch  $\mathcal{O}(2/5) = \{2/5, 4/5\}$  und ein drei-periodischer durch  $\mathcal{O}(2/9) = \{2/9, 4/9, 8/9\}$ . Um alle periodischen Punkte von  $f$  zu bestimmen, machen wir uns zunutze, dass es eine explizite Formel für die Iterierten gibt (Übungsaufgabe 4 auf Blatt 2):

$$f^n(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin |\sin(2^{n-1}\pi x)|.$$

<sup>4</sup>Das ist eine stetige Abbildung  $f : I \rightarrow I$ , so dass es ein  $c \in (0, 1)$  gibt und  $f|_{[0,c]}$  monoton wachsend und  $f|_{[c,1]}$  monoton fallend ist.

Daraus lässt sich ableiten, dass  $f^n$  eine stückweise lineare Funktion mit Steigung  $\pm 2^n$  ist und sich als

$$f^n(x) = \begin{cases} 2^n \left(x - \frac{2k}{2^n}\right) & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \\ 1 - 2^n \left(x - \frac{2k+1}{2^n}\right) & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right] \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1,$$

darstellen lässt. Wir erhalten damit als Fixpunkte von  $f^n$

$$x = \frac{2k}{2^n - 1}, \quad x = \frac{2k + 2}{2^n + 1}, \quad 0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1,$$

und folglich gilt  $\#\text{Per}_n(f) = 2^n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere können wir daraus auch ersehen, dass die periodischen Punkte von  $f$  dicht in  $I$  liegen. Die Primperioden der periodischen Punkte zu bestimmen würde etwas mehr Arbeit erfordern, und wir unterlassen dies an dieser Stelle. Mit Hilfe der obigen (zweiten) Formel für  $f^n(x)$  kann man auch die schließlich periodischen Punkte von  $f$  bestimmen und zeigen, dass diese dicht in  $I$  liegen. Genauer: Die Menge aller Punkte mit endlichem Vorwärtsorbit ist identisch mit der Menge der rationalen Zahlen in  $[0, 1]$ . Dies gibt einen Hinweis darauf, dass sich die Dynamik der Zeltabbildung durch Berechnung von Trajektorien mit Hilfe eines Computers nicht besonders gut verstehen lässt. Wie wir später sehen werden, können Vorwärtsorbits der Zeltabbildung mit irrationalen Anfangswerten dicht in  $I$  liegen.

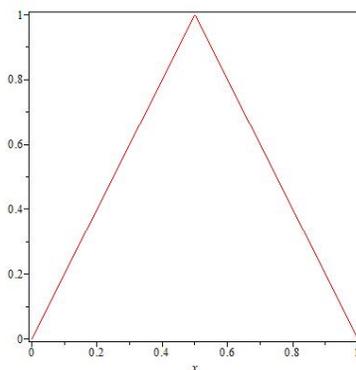


Abbildung 1: Graph der Zeltabbildung

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, wollen wir kurz auf die Methode der *graphischen Iteration* eingehen, die es erlaubt die Dynamik von Intervallabbildungen zu verstehen ohne Berechnungen anzustellen. Dazu zeichnen wir den Funktionsgraphen der gegebenen Abbildung  $f : I \rightarrow I$  und außerdem den der Identität (die Diagonale im positiven Quadranten). Die folgende Graphik zeigt, wie wir die Trajektorie eines Punktes in  $I$  verfolgen können.

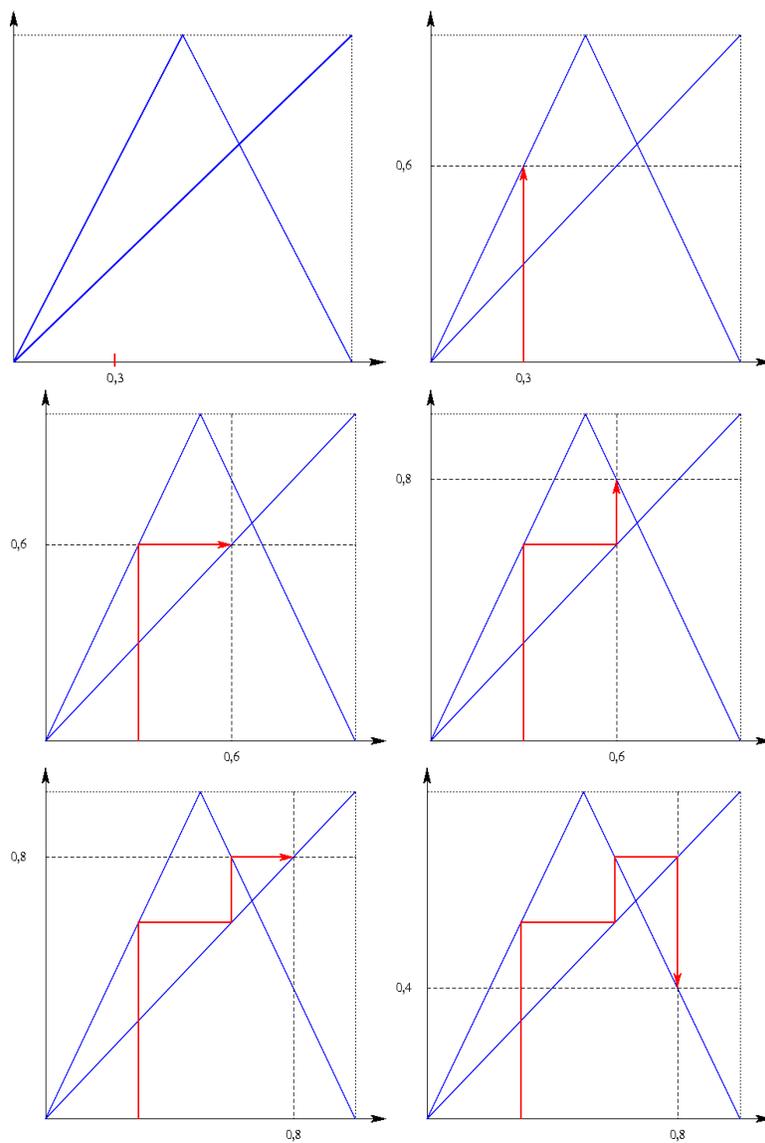


Abbildung 2: Graphische Iteration am Beispiel der Zeltabbildung

**3.5 Beispiel:** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  gegeben durch  $f(z) = z^2$ . Diese Abbildung heißt aus offensichtlichen Gründen auch *Winkelverdopplung*. Sie ist nichtinvertierbar, denn jedes  $z = e^{i\varphi} \in S^1$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , hat unter  $f$  genau zwei Urbilder, nämlich  $e^{i\varphi/2}$  und  $e^{i(\varphi/2+\pi)}$ . Die Iterierten von  $f$  sind gegeben durch  $f^n(z) = z^{2^n}$ , womit wir sehr leicht die periodischen Punkte von  $f$  bestimmen können:

$$f^n(z) = z \iff z^{2^n-1} = 1 \iff z \in \left\{ e^{2\pi i \frac{k}{2^n-1}} : 0 \leq k \leq 2^n - 2 \right\}.$$

Daraus ersehen wir, dass die periodischen Punkte dicht im Zustandsraum liegen (wie bei der Zeltabbildung). Das Gleiche gilt für die schließlich periodischen Punkte.

**3.6 Beispiel:** In diesem Beispiel geht es um Abbildungen auf dem  $n$ -dimensionalen Torus  $T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Zunächst überlegen wir uns, warum es sich dabei um einen kompakten metrischen Raum handelt. Dazu betrachten wir die Projektion  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , die einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  auf seine Äquivalenzklasse  $[x] = x + \mathbb{Z}^n$  abbildet. Wir versehen  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  mit der zugehörigen Quotiententopologie, d.h. eine Menge  $U \subset T^n$  ist offen genau dann, wenn ihr Urbild  $\pi^{-1}(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist. Daraus folgt insbesondere, dass  $\pi$  stetig ist. Um einzusehen, dass  $T^n$  kompakt ist, überlegen wir uns, dass die Einschränkung von  $\pi$  auf den kompakten Einheitswürfel  $[0, 1]^n$  bereits surjektiv ist. Also ist  $T^n$  als stetiges Bild von  $[0, 1]^n$  ebenfalls kompakt. Eine zugehörige Metrik auf  $T^n$  ist definiert durch

$$d([x], [y]) := \inf_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [x] \times [y]} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|,$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm bezeichnet. Es ist klar, dass dies eine Abbildung  $d : T^n \times T^n \rightarrow [0, \infty)$  definiert. Die Positiv-Definitheit sieht man wie folgt:

$$d([x], [y]) = 0 \iff \exists (\tilde{x}, \tilde{y}) \in [x] \times [y] : \tilde{x} = \tilde{y} \iff [x] = [y].$$

Die Symmetrie ist offensichtlich. Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, wählen wir zunächst  $\tilde{x} \in [x]$ ,  $\tilde{y}, y' \in [y]$  und  $\tilde{z} \in [z]$  so, dass

$$d([x], [y]) + d([y], [z]) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \|y' - \tilde{z}\|.$$

Die Translation  $T(w) = w + (\tilde{y} - y')$  erhält die Euklidische Norm und die Äquivalenzklassen  $[\cdot]$ , da  $\tilde{y} - y'$  ein ganzzahliger Vektor ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} d([x], [y]) + d([y], [z]) &= \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \|T(y') - T(\tilde{z})\| \\ &= \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \|\tilde{y} - T(\tilde{z})\| \\ &\geq \|\tilde{x} - T(\tilde{z})\| \geq d([x], [z]). \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch einsehen, dass die Metrik  $d$  die Quotiententopologie erzeugt. Dazu überlegt man sich zunächst, dass die Urbilder (kleiner)  $\varepsilon$ -Bälle in  $T^n$  Vereinigungen von  $\varepsilon$ -Bällen in  $\mathbb{R}^n$  sind. Ist umgekehrt  $U \subset T^n$  eine in der

Quotiententopologie offene Menge und  $[x] \in U$ , so ist  $\pi^{-1}(U)$  offen in  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset \pi^{-1}(U)$  und für  $\varepsilon$  klein genug gilt

$$\begin{aligned} \pi(B_\varepsilon(x)) &= \{[y] \in T^n : \|y - x\| < \varepsilon\} \\ &= \left\{ [y] \in T^n : \inf_{\tilde{y} \in [y]} \|\tilde{y} - x\| < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ [y] \in T^n : \inf_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [x] \times [y]} \|\tilde{y} - \tilde{x}\| < \varepsilon \right\} = B_\varepsilon([x]). \end{aligned}$$

Die Abbildungen auf  $T^n$ , die wir betrachten, sind von der Form

$$f_A : T^n \rightarrow T^n, \quad [x] \mapsto [Ax],$$

wobei  $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$  eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen bezeichnet. Es folgt unmittelbar, dass  $f_A$  wohldefiniert ist, denn  $[x] = [y]$  ist äquivalent zu  $y - x \in \mathbb{Z}^n$ , woraus  $A(y - x) = Ay - Ax \in \mathbb{Z}^n$  folgt, also  $[Ax] = [Ay]$ . Die Stetigkeit von  $f_A$  sieht man wie folgt: Es gilt  $f_A \circ \pi = \pi \circ A$ . Ist  $U \subset T^n$  eine offene Menge, so gilt deshalb  $\pi^{-1}(f_A^{-1}(U)) = A^{-1}(\pi^{-1}(U))$  und letztere Menge ist offen in  $\mathbb{R}^n$ . Nach Definition der Quotiententopologie ist deshalb auch  $f_A^{-1}(U)$  offen.<sup>5</sup>

Man nennt eine Abbildung der Form  $f_A$  einen *linearen Torusendomorphismus*. Ist  $f_A$  invertierbar, so spricht man von einem *linearen Torusautomorphismus*. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $|\det A| = 1$ . Dann hat auch  $A^{-1}$  ganzzahlige Einträge und  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ , denn  $f_A f_A^{-1}([x]) = f_A[A^{-1}x] = [AA^{-1}x] = [x]$  (und umgekehrt).

Wir wollen im Allgemeinen die Anzahl der Urbilder eines Punktes  $[x] \in T^n$  unter  $f_A$  bestimmen. Eine Möglichkeit dies zu tun besteht in der Anwendung der sogenannten *Smith-Normalform* ([http://en.wikipedia.org/wiki/Smith\\_normal\\_form](http://en.wikipedia.org/wiki/Smith_normal_form)) für Matrizen mit Einträgen in einem Hauptidealring.<sup>6</sup> Dies liefert zu gegebenem  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  Matrizen  $P, Q \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  mit Determinante  $(\pm)1$ , so dass  $D := PAQ$  Diagonalgestalt hat. Es folgt, dass  $f_D = f_P \circ f_A \circ f_Q$  oder  $f_A = f_{P^{-1}} \circ f_D \circ f_{Q^{-1}}$  und damit

$$\#f_A^{-1}([x]) = \#f_Q(f_D^{-1}(f_P([x]))) = \#f_D^{-1}([y])$$

mit  $[y] := f_P([x])$ . Ist  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , so folgt

$$[z] \in f_D^{-1}([y]) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i z_i - y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es gibt bis auf ganzzahlige Vielfache genau  $|\alpha_i|$  Lösungen  $z_i$  der obigen Gleichung, denn diese sind ja gegeben durch  $z_i = (k + y_i)/\alpha_i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , und

<sup>5</sup>Alternativ könnten wir den  $n$ -Torus auch als  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  Faktoren), versehen mit der Produkttopologie, definieren.

<sup>6</sup>Ein *Hauptidealring* ist ein Ring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, d.h. ein Ideal, das von einem einzigen Element erzeugt wird. Ein Beispiel ist der Ring der ganzen Zahlen. Die Ideale sind hier gegeben durch  $k\mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ .

$(\alpha_i + y_i)/\alpha_i = 1 + y_i/\alpha_i = y_i/\alpha_i \pmod{1}$ . Die Menge  $f_D^{-1}([y])$  enthält daher genau  $\prod_{i=1}^n |\alpha_i| = |\det D| = |\det A|$  Elemente. Also ist  $\#f_A^{-1}([x]) = |\det A|$  für alle  $[x] \in T^n$ . Mit Hilfe dieser Überlegung können wir auch leicht die Anzahl der  $n$ -periodischen Punkte für jedes  $n$  bestimmen. Wir betrachten die Gleichung  $f_A^n([x]) = [x]$  und stellen fest, dass dies äquivalent ist zu  $f_{A^n - I}([x]) = [0]$ . Sind die Eigenwerte von  $A$  dem Betrage nach verschieden von Eins, so folgt, dass  $A^n - I$  Eigenwerte ungleich Null hat,<sup>7</sup> und wir können folgern, dass

$$\# \text{Per}_n(f) = |\det(A^n - I)| \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

In diesem Fall nennt man  $f_A$  auch einen *hyperbolischen Torus-Endomorphismus*. Für einen solchen lässt sich zeigen, dass die Menge der periodischen Punkte dicht in  $T^n$  liegt (Übungsaufgabe 2 auf Blatt 3). Ist zudem  $f_A$  invertierbar, so ist  $f_A$  ein Beispiel für einen sogenannten *Anosov-Diffeomorphismus*. Diese Diffeomorphismen spielen in der differenzierbaren Theorie dynamischer Systeme eine wichtige Rolle. Ein spezielles Beispiel in Dimension 2 ist *Arnold's Cat Map* (siehe [http://en.wikipedia.org/wiki/Arnold%27s\\_cat\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Arnold%27s_cat_map)).

Später werden wir noch interessantere Beispiele topologischer dynamischer Systeme kennenlernen, bei denen der Zustandsraum keine Mannigfaltigkeit, sondern eine total unzusammenhängende Menge ist. Aber zunächst wollen wir die allgemeine Theorie noch etwas weiter entwickeln und das Phänomen der Rekurrenz studieren.

## 4 Rekurrenz

Zentral für das Verständnis der Dynamik auf kompakten Zustandsräumen ist die Beschreibung rekurrenten Verhaltens (lat. recurrere = zurücklaufen, wiederkehren): Trajektorien kehren wieder beliebig nahe zu ihrem Anfangswert zurück. Wie wir sehen werden, ist ein solches Verhalten auf kompakten Räumen unvermeidbar (anschaulich gesehen ist einfach nicht genug Platz vorhanden um Rekurrenz zu verhindern).<sup>8</sup> Die stärkste Form von Rekurrenz liegt vor auf der Menge  $\text{Per}(f)$  der periodischen Punkte. Im Allgemeinen muss ein TDS allerdings keine periodischen Punkte haben, wie wir am Beispiel der irrationalen Rotationen auf dem Einheitskreis sehen können.

**4.1 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **rekurrent**, falls  $x \in \omega(x)$ . Mit  $\mathcal{R}(f)$  bezeichnen wir die Menge aller rekurrenten Punkte von  $f$ , die **rekurrente Menge** von  $f$ .<sup>9</sup>

<sup>7</sup>Es würde auch reichen anzunehmen, dass es unter den Eigenwerten von  $A$  keine Einheitswurzeln gibt. In diesem und nur in diesem Fall hat  $f_A$  endlich viele  $n$ -periodische Punkte für jedes  $n$ .

<sup>8</sup>Ein einfaches Beispiel, an dem man sieht, dass es ohne Kompaktheit keine Rekurrenz geben muss, ist die Translation  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(x) = x + b$  mit  $b \neq 0$ .

<sup>9</sup>Manche Autoren meinen mit der rekurrenten Menge den Abschluss von  $\mathcal{R}(f)$ .

**4.2 Bemerkung:** Die rekurrente Menge ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Ein Gegenbeispiel liefert die Zeltabbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Wie wir gesehen haben, liegen die schließlich periodischen Punkte von  $f$  dicht in  $[0, 1]$ , und diese sind offensichtlich nicht rekurrent. Andererseits liegen auch die periodischen Punkte dicht in  $[0, 1]$ , und diese sind rekurrent. Also folgt  $\overline{\mathcal{R}(f)} \supset \text{Per}(f) = [0, 1]$ , aber  $\mathcal{R}(f) \neq [0, 1] = \overline{\mathcal{R}(f)}$ .

Um zu zeigen, dass die rekurrente Menge nichtleer ist, brauchen wir u.a. das folgende Lemma über kompakte metrische Räume. Wie der Beweis zeigt, gilt die Aussage des Lemmas auch für kompakte topologische Räume.

**4.3 Lemma:** *Es sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$  eine Familie abgeschlossener Teilmengen von  $X$  mit der Eigenschaft, dass der Schnitt von jeweils endlich vielen Mengen  $C_\alpha$  nichtleer ist. Dann ist auch der Schnitt  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$  aller dieser Mengen nichtleer.*

**Beweis:** Wir nehmen an, der Schnitt  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$  wäre leer. Dann bildet das Mengensystem  $\{C_\alpha^c\}_{\alpha \in A}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung  $\{C_{\alpha_1}^c, \dots, C_{\alpha_n}^c\}$  auswählen. Dann ist jedes  $x \in X$  in einem der  $C_{\alpha_i}$  nicht enthalten und daher auch nicht im Schnitt der  $C_{\alpha_i}$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Das folgende Lemma ist bekannt als das *Lemma von Zorn*. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom (siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Lemma\\_von\\_Zorn](http://de.wikipedia.org/wiki/Lemma_von_Zorn)).

**4.4 Lemma:** *Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge, d.h.  $\leq$  ist eine Ordnungsrelation auf  $X$  (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv). Ferner besitze jede total geordnete Teilmenge von  $X$  (das ist eine Menge  $A \subset X$ , so dass stets  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  für je zwei Elemente  $a, b \in A$  gilt) eine obere Schranke. Dann hat  $X$  ein maximales Element, d.h. ein Element  $x \in X$  mit  $y \leq x$  für alle  $y \in X$ .*

Natürlich kann man im Lemma von Zorn auch von unteren Schranken und minimalen Elementen sprechen, indem man die Umkehrrelation betrachtet.

**4.5 Satz:** *Die rekurrente Menge  $\mathcal{R}(f)$  ist nichtleer. Sie ist vorwärtsinvariant, und wenn  $f$  invertierbar ist, auch rückwärtsinvariant.*

**Beweis:** Wir beweisen zunächst die Invarianz-Eigenschaften von  $\mathcal{R}(f)$ : Sei  $x \in \omega(x)$ , also  $f^{m_n}(x) \rightarrow x$  für eine streng monotone Folge  $m_n \rightarrow \infty$ . Dann folgt  $f^{m_n}(f(x)) = f(f^{m_n}(x)) \rightarrow f(x)$ . Ist  $f$  invertierbar, so gilt darüberhinaus  $f^{m_n}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f^{m_n}(x)) \rightarrow f^{-1}(x)$ .

Der Beweis, dass  $\mathcal{R}(f)$  nichtleer ist, ist nicht ganz trivial. Wir bezeichnen dazu mit  $\mathcal{C}$  die Familie aller nichtleeren abgeschlossenen vorwärtsinvarianten Mengen in  $X$ . Die Mengeninklusion liefert eine partielle Ordnung auf  $\mathcal{C}$  (reflexiv, antisymmetrisch und transitiv). Schneidet man beliebige abgeschlossene vorwärtsinvariante Mengen, so ist auch der Schnitt abgeschlossen und vorwärtsinvariant.

Daraus folgt, dass jede total geordnete Teilmenge von  $\mathcal{C}$  eine untere Schranke besitzt (Hier geht Lemma 4.3 ein). Nach dem Lemma von Zorn hat  $\mathcal{C}$  deshalb ein minimales Element  $A$ , d.h. eine nichtleere abgeschlossene vorwärtsinvariante Menge ohne echte Teilmengen mit dieser Eigenschaft. Die Menge  $A$  hat die Eigenschaft, dass  $\omega(x) = A$  für alle  $x \in A$  gilt. Ansonsten wäre  $\omega(x)$  eine Teilmenge von  $A$ , die ebenfalls nichtleer, abgeschlossen und vorwärtsinvariant ist, im Widerspruch zur Minimalität. Offensichtlich ist jeder Punkt  $x \in A$  rekurrent, also ist  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ .  $\square$

Aus dem obigen Beweis ergibt sich folgendes Korollar.

**4.6 Korollar:** *Jedes TDS  $(X, f)$  besitzt eine minimale Menge, d.h. eine nichtleere, abgeschlossene vorwärtsinvariante Menge  $A \subset X$ , die keine echte Teilmengen mit diesen Eigenschaften besitzt.*

Einen schwächeren Begriff von Rekurrenz erhält man, wenn man nur fordert, dass Punkte, die nahe bei  $x$  liegen, wieder in die Nähe von  $x$  zurückkehren.

**4.7 Definition:** *Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **wandernd**, falls eine Umgebung  $U$  von  $x$  existiert, so dass  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  für alle  $n \geq 1$ . Andernfalls heißt  $x$  **nichtwandernd** und wir bezeichnen mit  $\Omega(f)$  die Menge aller solchen Punkte, die **nichtwandernde Menge** von  $f$ .*

**4.8 Satz:** *Die nichtwandernde Menge  $\Omega(f)$  ist nichtleer, abgeschlossen und vorwärtsinvariant. Sie enthält insbesondere alle  $\omega$ -Limesmengen und im invertierbaren Fall auch alle  $\alpha$ -Limesmengen. Ist  $(x_n)$  eine Folge in  $X$  mit  $f(x_{n+1}) = x_n$  für alle  $n$ , so liegt jeder Häufungswert von  $(x_n)$  in  $\Omega(f)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass  $\Omega(f)$  alle  $\omega$ -Limesmengen enthält. Da diese nach Satz 2.17 nichtleer sind, folgt automatisch, dass auch  $\Omega(f)$  nichtleer ist. Sei  $y \in \omega(x)$  für ein  $x \in X$ , und  $U$  eine Umgebung von  $y$ . Dann existieren  $n > m \geq 1$  mit  $f^n(x), f^m(x) \in U$ . Daraus folgt  $f^n(x) \in f^{n-m}(U) \cap U$ . Also ist  $y \in \Omega(f)$ . Die Menge der wandernden Punkte ist offen, denn eine offene "wandernden Umgebung"  $U$  von  $x$  ist auch eine wandernd für alle  $y \in U$ . Daher ist  $\Omega(f)$  abgeschlossen. Um die Vorwärtsinvarianz zu zeigen, sei  $x \in \Omega(f)$  und  $y = f(x)$ . Ist  $U$  eine offene Umgebung von  $y$ , so ist  $f^{-1}(U)$  eine offene Umgebung von  $x$ . Also existiert ein  $n \geq 1$  und ein  $z \in f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)$ . Dann gilt  $f(z) \in U$  und  $z = f^n(y)$  für ein  $y$  mit  $f(y) \in U$ . Daraus folgt  $f(z) = f^{n+1}(y) = f^n(f(y)) \in f^n(U)$ . Insgesamt gilt also  $f(z) \in f^n(U) \cap U$ , womit die Vorwärtsinvarianz von  $\Omega(f)$  gezeigt ist.

Sei nun  $z \in X$  Häufungswert einer Folge  $(x_n)$  mit  $f(x_{n+1}) = x_n$ . Dann existiert eine Teilfolge  $(x_{m_n})$ , die gegen  $z$  konvergiert. Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $z$ . Dann existiert ein  $n_0 \geq 1$  mit  $x_{m_n} \in U$  für alle  $n \geq n_0$ . Es folgt  $x_{m_n} = f^{m_{n+1}-m_n}(x_{m_{n+1}})$  (für alle  $n \geq n_0$ ), also  $x_{m_n} \in U \cap f^{m_{n+1}-m_n}(U)$ . Daher gilt  $z \in \Omega(f)$ . Im invertierbaren Fall folgt daraus, dass  $\Omega(f)$  alle  $\alpha$ -Limesmengen enthält.  $\square$

**4.9 Bemerkung:** Die Definition der nichtwandernden Menge lässt sich iterieren. So können wir rekursiv durch  $\Omega_1(f) := \Omega(f)$  und  $\Omega_n(f) := \Omega(f|_{\Omega_{n-1}(f)})$  eine Folge von ineinander enthaltenen abgeschlossenen vorwärtsinvarianten Mengen konstruieren. Wir können diesen Prozess sogar noch weiter iterieren, indem wir die Rekursion erneut mit der Menge  $\bigcap_{n \geq 1} \Omega_n(f)$  starten. Meistens stabilisiert sich der Prozess jedoch schnell.

**4.10 Bemerkung:** In der differenzierbaren Theorie dynamischer Systeme kann man unter gewissen Voraussetzungen mehr über die Substruktur der nichtwandernden Menge aussagen. Für sogenannte *Axiom A Diffeomorphismen* zerfällt die nichtwandernde Menge in invariante Basismengen, auf denen sich der Diffeomorphismus chaotisch verhält (in einem Sinne, den wir später noch präzise machen werden).

Schließlich wollen wir einen noch schwächeren Begriff von Rekurrenz einführen, den der *Kettenrekurrenz*. Dazu müssen wir zuerst den Begriff einer  $\varepsilon$ -Kette einführen.

**4.11 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS und  $\varepsilon > 0$ . Eine endliche Folge  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von Punkten in  $X$  mit  $n \geq 2$  heißt  **$\varepsilon$ -Kette** (oder  **$\varepsilon$ -Pseudo-Trajektorie**), falls  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Ist  $x_1 = x_n$ , so sprechen wir von einer **periodischen  $\varepsilon$ -Kette**.

**4.12 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **kettenrekurrent**, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Kette  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_1 = x_n = x$  existiert. Die Menge aller kettenrekurrenten Punkte heißt die **kettenrekurrente Menge** von  $f$  und wird mit  $\mathcal{C}(f)$  bezeichnet.<sup>10</sup>

**4.13 Satz:** Die kettenrekurrente Menge  $\mathcal{C}(f)$  ist abgeschlossen und vorwärtsinvariant.

**Beweis:** Die Abgeschlossenheit sieht man folgendermaßen: Sei  $(x_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathcal{C}(f)$ , die gegen ein  $x \in X$  konvergiert. Wählen wir  $\delta \in (0, \varepsilon/2)$  so klein, dass  $d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon/2$ , falls  $d(x, x_n) < \delta$  und  $n$  so groß, dass  $d(x, x_n) < \delta$ , so erhalten wir aus jeder  $\varepsilon/2$ -Kette von  $x_n$  nach  $x_n$  eine  $\varepsilon$ -Kette von  $x$  nach  $x$ , wenn wir  $x_n$  (also den ersten und letzten Punkt der Kette) durch  $x$  ersetzen. Also gilt auch  $x \in \mathcal{C}(f)$ .

Nun sei  $x \in \mathcal{C}(f)$  beliebig. Um zu zeigen, dass  $f(x) \in \mathcal{C}(f)$ , verwenden wir, dass die stetige Abbildung  $f$  auf dem kompakten metrischen Raum  $X$  sogar gleichmäßig stetig ist. Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $d(f(w), f(z)) < \varepsilon$ , falls  $d(w, z) < \delta$ . Nun sei  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit  $x_1 = x_n = x$  eine  $\delta$ -Kette. Wir betrachten die Kette  $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ . Dann gilt

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(f(x_i)), f(x_{i+1})) < \varepsilon.$$

---

<sup>10</sup>Das  $\mathcal{C}$  steht für "chain".

Also handelt es sich um eine  $\varepsilon$ -Kette von  $f(x)$  nach  $f(x)$ , woraus  $f(x) \in \mathcal{C}(f)$  folgt.  $\square$

**4.14 Bemerkung:** Dass  $\mathcal{C}(f)$  sogar strikt vorwärtsinvariant ist, werden wir später sehen.

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang der verschiedenen Arten von Rekurrenz.

**4.15 Satz:** Für ein TDS  $(X, f)$  gelten die Inklusionen

$$\overline{\text{Per}(f)} \subset \overline{\mathcal{R}(f)} \subset \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x, f)} \subset \Omega(f) \subset \mathcal{C}(f).$$

Dabei kann lediglich die erste Menge leer sein.

**Beweis:** Jeder periodische Punkt ist natürlich in seiner eigenen  $\omega$ -Limesmenge enthalten. Daher gilt die erste Inklusion. Die zweite Inklusion ist trivial und die dritte folgt aus Satz 4.8. Es bleibt zu zeigen, dass jeder nichtwandernde Punkt kettenrekurrent ist. Das ist nicht schwer: Sei  $x \in \Omega(f)$  und  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  stetig ist, existiert ein  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , so dass  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ , falls  $d(x, y) < \delta$ . Ferner existiert ein  $n \geq 1$ , so dass  $f^n(B_\delta(x)) \cap B_\delta(x) \neq \emptyset$ . Also gibt es ein  $y$  mit  $d(x, y) < \delta$  und  $d(f^n(y), x) < \delta$ . Die Folge  $(x, f(y), f^2(y), \dots, f^{n-1}(y), x)$  ist dann eine  $\varepsilon$ -Kette von  $x$  nach  $x$ , denn  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$  wegen  $d(x, y) < \delta$  und  $d(f(f^{n-1}(y)), x) = d(f^n(y), x) < \delta < \varepsilon$ .  $\square$

Am Beispiel einer irrationalen Rotation auf  $S^1$  sehen wir, dass die erste Inklusion in obigem Satz strikt sein kann. Folgendes Beispiel zeigt, dass auch die letzte Inklusion strikt sein kann.

**4.16 Beispiel:** Man betrachte folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Potenzen dieser Matrix rechnet man leicht nach, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $A$  induziert ein TDS auf dem Einheitskreis  $S^1$  durch die Abbildungsvorschrift

$$f_A : S^1 \rightarrow S^1, \quad x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}.$$

Dies können wir auch schreiben als  $f_A(\pi(x)) = \pi(Ax)$ , wobei  $\pi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ ,  $x \mapsto x/\|x\|$ . Daraus ergibt sich

$$f_A^n(\pi(x)) = \pi(A^n x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad n \geq 0.$$

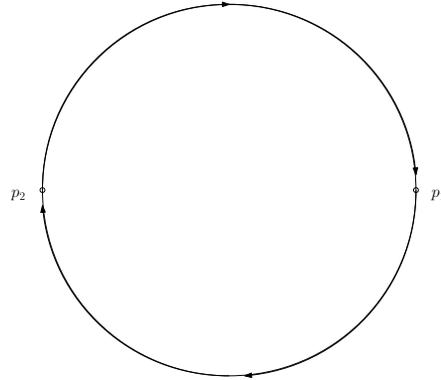


Abbildung 3: Die Dynamik der Abbildung  $f_A$

Die Abbildung  $f_A$  ist invertierbar mit der Inversen  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ . Wir wollen zeigen, dass  $\Omega(f_A)$  nur aus den Punkten  $(\pm 1, 0)^T$  besteht, wohingegen  $\mathcal{C}(f_A) = S^1$ . Folgende Grafik veranschaulicht die Dynamik von  $f_A$ : Die Punkte  $p_1 = (1, 0)^T$  und  $p_2 = (-1, 0)^T$  sind offensichtlich Fixpunkte. Jede Trajektorie, die im oberen Halbkreis startet, konvergiert gegen  $p_1$ , wohingegen jede im unteren Halbkreis gegen  $p_2$  konvergiert. Dies sieht man wie folgt:

$$\pi \left( A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \pi \begin{pmatrix} x + ny \\ y \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} \frac{x}{n} + y \\ \frac{y}{n} \end{pmatrix} \rightarrow \pi \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daran können wir sehen, dass  $\Omega(f_A) = \{p_1, p_2\}$ . Allerdings können wir von jedem Punkt zu sich selbst eine  $\varepsilon$ -Kette konstruieren, die einmal "im Kreis läuft". Starten wir z.B. im unteren Halbkreis, so laufen wir zunächst eine echte Trajektorie entlang bis wir nahe genug am Fixpunkt  $p_2$  angelangt sind. Dann überspringen wir diesen und laufen weiter im Kreis bis wir nahe genug bei  $p_1$  sind. Diesen Punkt überspringen wir auch und laufen dann weiter entlang derjenigen Trajektorie, die uns wieder zum Ausgangspunkt führt.

Ob die anderen Inklusionen in obigem Satz auch strikt sein können, werden wir erst später sehen. Unser Ziel im Rest dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass man mit Hilfe der kettenrekurrenten Menge eine Zerlegung des Zustandsraums in Mengen mit ähnlichem asymptotischen Verhalten erhält. Ohne viel Mehraufwand können wir etwas Allgemeineres beweisen. Dazu nehmen wir im Folgenden an, dass  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung eines metrischen, aber nicht notwendigerweise kompakten Raumes  $X$  ist. Wir werden das zugehörige dynamische System auf kompakten aber nicht notwendigerweisen invarianten Mengen  $K \subset X$  betrachten.

**4.17 Definition:** Sei  $K \subset X$  kompakt und  $x, y \in K$ . Dann bezeichnet

$$\operatorname{ch}(x, y, K, \varepsilon, f)$$

die Vereinigung aller Punkte in  $\varepsilon$ -Ketten, die in  $x$  starten, in  $y$  enden und aus Punkten in  $K$  bestehen. Ferner definieren wir

$$\text{ch}(x, y, K, f) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \text{ch}(x, y, K, \varepsilon, f).$$

Die  **$K$ - $\varepsilon$ -kettenrekurrente Menge** von  $f$  ist

$$\mathcal{C}(K, \varepsilon, f) := \{x \in X : \text{ch}(x, x, K, \varepsilon, f) \neq \emptyset\},$$

und die  **$K$ -kettenrekurrente Menge** von  $f$  ist

$$\mathcal{C}(K, f) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}(K, \varepsilon, f).$$

Oft lassen wir in der Notation auch die Abbildung  $f$  weg, wir schreiben also zum Beispiel  $\text{ch}(x, y, K, \varepsilon)$ .

**4.18 Bemerkung:** Mit diesen Bezeichnungen gilt offensichtlich  $\mathcal{C}(X, f) = \mathcal{C}(f)$  für ein TDS  $(X, f)$ .

**4.19 Lemma:** Ist  $\text{ch}(x, x, K, \varepsilon) \cap \text{ch}(y, y, K, \varepsilon) \neq \emptyset$ , so folgt

$$\text{ch}(x, x, K, \varepsilon) = \text{ch}(y, y, K, \varepsilon).$$

**Beweis:** Sei  $z \in \text{ch}(x, x, K, \varepsilon) \cap \text{ch}(y, y, K, \varepsilon)$ . Dann sind die Mengen

$$\text{ch}(x, z, K, \varepsilon), \text{ch}(z, x, K, \varepsilon), \text{ch}(y, z, K, \varepsilon), \text{ch}(z, y, K, \varepsilon)$$

nichtleer. Sei ferner  $w \in \text{ch}(y, y, K, \varepsilon)$ . Man kann zwei Ketten verknüpfen, wenn der Endpunkt der einen der Anfangspunkt der anderen ist. Es gibt Ketten von  $x$  nach  $z$ , von  $z$  nach  $y$ , von  $y$  nach  $w$ , von  $w$  nach  $y$ , von  $y$  nach  $z$  und von  $z$  nach  $x$ . Daher ist  $w \in \text{ch}(x, x, K, \varepsilon)$ . Vertauschung von  $x$  und  $y$  liefert die Behauptung.  $\square$

**4.20 Definition:** Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{C}(K, f)$  durch  $x \sim y$ , falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine periodische  $\varepsilon$ -Kette in  $K$  gibt, die  $x$  und  $y$  enthält. Die Äquivalenzklasse  $\text{ch}(x, x, K, f)$  heißt die  **$K$ -Äquivalenzklasse** von  $x$ . Die Äquivalenzklassen heißen auch  **$K$ -Basismengen**.

Den Beweis, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, verlegen wir in die Übungen (siehe Aufgabe 3 auf Blatt 4). Unser Ziel ist jetzt zu beweisen, dass eine kompakte Menge  $K$  in die stabilen Mengen (Definition siehe weiter unten) der  $K$ -Basismengen und die Menge der Punkte, die  $K$  verlassen, zerlegt werden kann. Dazu benötigen wir noch weitere Vorbereitungen.

**4.21 Lemma:** Sei  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$ . Dann gibt es Umgebungen  $U, V$  und  $W$  von  $x, f(x)$  und  $f^2(x)$ , so dass  $y_0 \in U, y_1 \in V$  und  $y_2 \in W$  impliziert, dass  $(y_0, y_1, y_2)$  eine  $\varepsilon$ -Kette ist.

**Beweis:** Wir verwenden die Stetigkeit von  $f$ , um Umgebungen  $U$  und  $V$  zu wählen, so dass  $f(U)$ ,  $V$  und  $f(V)$  jeweils in  $(\varepsilon/2)$ -Umgebungen von  $f(x)$ ,  $f(x)$  und  $f^2(x)$  enthalten sind. Dann wählen wir  $W$  als die  $(\varepsilon/2)$ -Umgebung von  $f^2(x)$ . Die Behauptung folgt dann aus der Dreiecksungleichung.  $\square$

**4.22 Lemma:** Sei  $x \in X$  mit  $\mathcal{O}^+(x) \subset K$ . Dann gilt für alle  $z \in \omega(x)$ , dass  $\omega(x) \subset \text{ch}(z, z, K)$ .

**Beweis:** Setze  $x_j := f^j(x)$  und betrachte  $z, w \in \omega(x)$ . Wir zeigen, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Kette der Form

$$z, x_n, \dots, x_{n+m}, w, x_{n+m+2}, \dots, x_{n+m+r}, z \quad (1)$$

mit  $n, m, r \in \mathbb{N}$  existiert. Dann folgt  $w \in \text{ch}(z, z, K)$  und damit  $\omega(x) \subset \text{ch}(z, z, K)$ .

Wegen  $f(z) \in \omega(x)$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $d(f(z), x_n) < \varepsilon$ . Also bilden  $z, x_n$  eine  $\varepsilon$ -Kette. Wegen  $w \in \omega(x)$  und der strikten Vorwärtsinvarianz von  $\omega(x)$  gibt es ein  $u \in \omega(x)$  mit  $f(u) = w$ . Nach Lemma 4.21 können wir Umgebungen  $U, V, W$  von  $u, f(u), f^2(u)$  wählen, so dass je drei Punkte aus diesen Umgebungen eine  $\varepsilon$ -Kette bilden. Wegen  $u \in \omega(x)$  gibt es  $m \in \mathbb{N}$  mit  $x_{n+m} \in U$  und  $x_{n+m+2} \in W$ . Daher bilden

$$z, x_n, \dots, x_{n+m}, w, x_{n+m+2}$$

eine  $\varepsilon$ -Kette. Wegen  $z \in \omega(x)$  gibt es ein  $r$  mit  $d(z, x_{n+m+r+1}) < \varepsilon$ . Daher ist (1) eine  $\varepsilon$ -Kette.  $\square$

**4.23 Lemma:** Für jedes  $w \in K$  ist  $R := \text{ch}(w, w, K)$  eine kompakte strikt vorwärtsinvariante Menge in  $K$ .

**Beweis:** Für die Kompaktheit von  $R$  reicht es zu zeigen, dass  $R$  abgeschlossen ist. Sei also  $x$  ein Häufungspunkt von  $R$ . Dann gibt es ein  $y \in R$  mit  $d(x, y) < \varepsilon/2$  und  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ . Wegen  $y \in R$  gibt es eine  $(\varepsilon/2)$ -Kette

$$y_0, \dots, y_{r-1}, y_r, y_{r+1}, \dots, y_s,$$

mit  $y_0 = y_s = w$  und  $y_r = y$ . Dann ist

$$y_0, \dots, y_{r-1}, x, y_{r+1}, \dots, y_s$$

eine  $\varepsilon$ -Kette in  $K$ . Daher ist  $x \in R$  und  $R$  also abgeschlossen.

Als nächstes, beweisen wir, dass  $f(R) \subset R$ : Sei  $x \in R$ . Es reicht zu zeigen, dass  $f(x) \in \text{ch}(w, w, K, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Zunächst ist klar, dass  $f(x) \in K$ , weil sonst eine Umgebung von  $f(x)$  leeren Schnitt mit  $K$  hat und daher alle Ketten durch  $x$  (für hinreichend kleine  $\varepsilon$ ) die Menge  $K$  verlassen. Wähle nun  $\delta < \varepsilon/2$  so, dass  $d(u, v) < \delta$  und  $u, v \in K$  impliziert, dass

$$d(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad d(f^2(u), f^2(v)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle eine  $\delta$ -Kette  $y_0, \dots, y_n, \dots, y_m$  in  $K$  mit  $y_0, y_m = w$  und  $y_n = x$ . Wegen  $d(f(y_n), y_{n+1}) < \delta$  gilt dann

$$d(f^2(x), y_{n+2}) \leq d(f^2(y_n), f(y_{n+1})) + d(f(y_{n+1}), y_{n+2}) < \varepsilon.$$

Daher ist

$$y_0, \dots, y_n = x, f(x), y_{n+2}, \dots, y_m$$

eine  $\varepsilon$ -Kette in  $K$  und  $f(x) \in \text{ch}(w, w, K, \varepsilon)$ .

Schließlich zeigen wir die umgekehrte Inklusion  $R \subset f(R)$ : Sei  $x \in R$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wähle eine  $(1/n)$ -Kette

$$y_0^{(n)}, \dots, y_{k(n)}^{(n)}, \dots, y_{m(n)}^{(n)}$$

mit  $y_0^{(n)} = y_{m(n)}^{(n)} = w$  und  $x = y_{k(n)}^{(n)}$ . Wegen der Kompaktheit von  $K$  konvergiert eine Teilfolge  $y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}$  gegen ein  $y \in K$ . Da  $f(y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}) \rightarrow x$ , folgt  $f(y) = x$ . Können wir jetzt noch zeigen, dass  $y \in R$ , so folgt  $R \subset f(R)$ . Dazu beachtet man, dass  $\text{ch}(w, w, K, 1/n) \subset \text{ch}(w, w, K, 1/l)$  für  $n > l$ . Daraus folgt  $y_{k(n_m)-1}^{(n_m)} \in \text{ch}(w, w, K, 1/l)$  für alle  $l \in \mathbb{N}$  und  $n_m > l$ . Dann können wir für hinreichend große  $m$  in der entsprechenden  $(1/n_m)$ -Kette den Punkt  $y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}$  durch  $y$  ersetzen und erhalten eine  $(1/l)$ -Kette

$$y_0^{(n_m)}, \dots, y_{k(n_m)-2}^{(n_m)}, y, y_{k(n_m)+1}^{(n_m)}, \dots, y_{m(n_m)}^{(n_m)}.$$

Wir wählen hierzu  $n_m > 2l$  so groß, dass  $d(y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}, y) < 1/(2l)$ . Dann folgt

$$d(f(y_{k(n_m)-2}^{(n_m)}), y) \leq d(f(y_{k(n_m)-2}^{(n_m)}), y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}) + d(y_{k(n_m)-1}^{(n_m)}, y) < \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l} = \frac{1}{l},$$

und natürlich ist  $d(f(y), x) = 0$ . Daher ist  $y \in \text{ch}(w, w, K, 1/l)$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , also in  $R$ .  $\square$

Nun können wir *Conley's Dekompositionstheorem* beweisen, das manchmal auch als *Fundamentaltheorem der dynamischen Systeme* bezeichnet wird. Dazu müssen wir noch die *stabile Menge* einer abgeschlossenen Menge  $Y \subset X$  definieren:

$$W^s(Y) := \left\{ x \in X : \inf_{y \in Y} d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Wir werden im Folgenden die Mengen

$$W^s(Y, K) := \{ x \in W^s(Y) : \mathcal{O}^+(x) \subset K \}$$

betrachten, wobei  $Y$  eine  $K$ -Basismenge ist. Wir nennen  $W^s(Y, K)$  die  *$K$ -stabile Menge* von  $Y$ .

**4.24 Theorem:** *Jede  $K$ -Basismenge ist strikt vorwärtsinvariant und  $K$  ist die disjunkte Vereinigung der  $K$ -stabilen Mengen der  $K$ -Basismengen zusammen mit der Menge der Punkte in  $K$ , deren Trajektorie  $K$  verlässt.*

**Beweis:** Nach Lemma 4.23 sind die  $K$ -Basismengen strikt vorwärtsinvariant. Jeder Punkt  $x$  mit  $\mathcal{O}^+(x) \subset K$  ist in der stabilen Menge seiner  $\omega$ -Limesmenge enthalten. Dies zeigt man durch einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, es existiert eine Teilfolge  $(n_m)_{m \geq 1}$  und ein  $\delta > 0$ , so dass

$$d(f^{n_m}(x), f^{n_m}(y)) \geq \delta \quad \text{für alle } m \geq 1, y \in \omega(x).$$

Da die Folge  $f^{n_m}(x)$  selbst wieder eine konvergente Teilfolge hat, die gegen ein  $y \in \omega(x)$  konvergiert, ist dies ein Widerspruch. Nach Lemma 4.22 ist  $\omega(x)$  enthalten in einer  $K$ -Basismenge. Je zwei  $K$ -Basismengen  $R$  und  $S$  sind disjunkt und kompakt und haben daher eine positive Distanz. Deshalb sind ihre  $K$ -stabilen Mengen disjunkt, denn die Trajektorie eines Punktes  $x$  kann sich dann nicht zugleich Trajektorien in  $R$  und Trajektorien in  $S$  annähern. Folglich wird  $K$  wie behauptet partitioniert.  $\square$

Interpretation: Jede Trajektorie, die in einer kompakten Menge  $K$  startet, verlässt entweder  $K$  oder läuft schließlich gegen eine  $K$ -Basismenge, die ihre  $\omega$ -Limesmenge enthält. Das Langzeitverhalten von Trajektorien in  $K$  ist durch die  $K$ -kettenrekurrente Menge bestimmt.

**4.25 Korollar:** *Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann ist  $\mathcal{C}(f)$  die disjunkte Vereinigung kompakter strikt vorwärtsinvarianter Mengen. Insbesondere ist  $\mathcal{C}(f)$  selbst strikt vorwärtsinvariant.*

## 5 Symbolische Dynamik

In diesem Abschnitt werden wir eine große Klasse von weiteren Beispielen für TDS kennen lernen. Diese Beispiele haben eine sehr wichtige Bedeutung in der Theorie der dynamischen Systeme, da sie als Modelle für viele andere Systeme dienen.

Bis jetzt haben wir nur Beispiele betrachtet, in denen der Zustandsraum eine (berandete) Mannigfaltigkeit ist, d.h. lokal so aussieht wie der  $\mathbb{R}^n$ . Die Zustandsräume, die wir im Folgenden betrachten, sind ganz anderer Art, nämlich total unzusammenhängend und perfekt, d.h. die Zusammenhangskomponenten sind alle einelementig und jeder Punkt ist ein Häufungspunkt.

Für jede ganze Zahl  $N \geq 2$  betrachten wir die Menge

$$X_N := \{1, \dots, N\}.$$

Mit der diskreten Topologie wird  $X_N$  zu einem kompakten metrischen Raum. Eine Metrik ist gegeben durch  $\delta(x, y) = 1$  für  $x \neq y$  und  $\delta(x, x) = 0$ . Nun

betrachten wir die Produkträume  $\Sigma_N := X_N^{\mathbb{Z}}$  und  $\Sigma_{N,+} := X_N^{\mathbb{N}_0}$ . Nach dem Satz von Tychonoff<sup>11</sup> sind  $\Sigma_N$  und  $\Sigma_{N,+}$ , versehen mit der Produkttopologie,<sup>12</sup> kompakte topologische Räume. Für jedes  $\lambda > 1$  definieren wir

$$d_\lambda(x, y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{|k|}}, \quad x, y \in \Sigma_N,$$

$$d_{\lambda,+}(x, y) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^k}, \quad x, y \in \Sigma_{N,+}.$$

**5.1 Satz:**  $(\Sigma_N, d_\lambda)$  ist ein metrischer Raum, homöomorph zu  $\Sigma_N$  mit der Produkttopologie. Die analoge Aussage gilt für  $(\Sigma_{N,+}, d_{\lambda,+})$ .

**Beweis:** Offensichtlich gilt  $d_\lambda \geq 0$ . Ferner gilt  $d_\lambda < \infty$ , da aus  $\lambda > 1$  und den Eigenschaften der geometrischen Reihe folgt, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{|k|}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{|k|} < \infty.$$

Positiv-Definitheit, Symmetrie und die Dreiecksungleichung folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von  $\delta$ .

Sei nun  $U \subset \Sigma_{N,+}$  eine offene Subbasismenge<sup>13</sup> in der Produkttopologie, d.h. das Urbild einer offenen Menge in  $X_N$  unter einer der Projektionen  $\text{pr}_{k_0} : x \mapsto x_{k_0}$ ,  $k_0 \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $x \in U$  beliebig und  $\varepsilon := 1/(2\lambda^{k_0})$ . Dann gilt

$$d_{\lambda,+}(x, y) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(x_{k_0}, y_{k_0})}{\lambda^{k_0}} \leq d_{\lambda,+}(x, y) < \frac{1}{2\lambda^{k_0}} \quad \Rightarrow \quad \delta(x_{k_0}, y_{k_0}) < \frac{1}{2},$$

woraus  $x_{k_0} = y_{k_0}$  folgt. Dies zeigt, dass es einen offenen Ball um  $x$  gibt, der in  $U$  enthalten ist. Folglich ist  $U$  offen bezüglich  $d_{\lambda,+}$ . Betrachte jetzt einen offenen Ball  $B_\varepsilon(x)$  für  $\varepsilon > 0$  und  $x \in \Sigma_{N,+}$ . Definiere  $U := \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{pr}_k^{-1}(x_k)$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k \geq n} \lambda^{-k} < \varepsilon$ . Dann ist  $U$  offen in der Produkttopologie, da  $U$  der endliche Durchschnitt von Subbasismengen ist. Die Menge  $U$  besteht aus allen Folgen  $y$  mit  $y_k = x_k$  für  $k = 0, \dots, n-1$ . Dies liefert

$$d_{\lambda,+}(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon.$$

Daher ist  $U$  eine offene Umgebung von  $x$ , enthalten in  $B_\varepsilon(x)$ . Dies zeigt, dass metrische Bälle offen in der Produkttopologie sind. Folglich induziert  $d_{\lambda,+}$  die Produkttopologie. Den Beweis für  $\Sigma_N$  führt man analog.  $\square$

<sup>11</sup>Siehe [http://de.wikipedia.org/wiki/Satz\\_von\\_Tychonoff](http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Tychonoff).

<sup>12</sup>Zur Erinnerung: Sind  $X_i$ ,  $i \in I$ , topologische Räume, so ist die *Produkttopologie* auf  $X = \prod_{i \in I} X_i$  die kleinste Topologie, so dass alle Projektionen  $X \rightarrow X_j$ ,  $(x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$ , stetig sind.

<sup>13</sup>Zur Erinnerung: Ist  $X$  ein topologischer Raum, so heißt ein Mengensystem  $\mathcal{S}$  offener Mengen in  $X$  eine *Subbasis* der Topologie von  $X$ , falls jede offene Menge in  $X$  die Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen in  $\mathcal{S}$  ist.

Wir haben damit auf den Räumen  $\Sigma_{N,+}$  und  $\Sigma_N$  jeweils eine ganze Klasse von Metriken zur Verfügung, die wir je nach Zweck einsetzen können.

**5.2 Lemma:** Für alle  $x, y \in \Sigma_{N,+}$  gilt:

- (i) Falls  $x_k = y_k$  für  $k = 0, \dots, n$ , dann ist  $d_{2,+}(x, y) \leq 2^{-n}$ .
- (ii) Falls  $d_{2,+}(x, y) < 2^{-n}$ , dann ist  $x_k = y_k$  für  $k = 0, \dots, n$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe 2 auf Blatt 5. □

**5.3 Definition:** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **perfekt**, falls alle Punkte in  $X$  Häufungspunkte sind, d.h. jede Umgebung  $U$  eines Punktes  $x \in X$  enthält mindestens zwei (und damit unendlich viele) Elemente. Der Raum  $(X, d)$  heißt **total unzusammenhängend**, falls alle Zusammenhangskomponenten von  $X$  einelementig sind.

**5.4 Satz:** Die Räume  $\Sigma_N$  und  $\Sigma_{N,+}$  sind kompakt, perfekt und total unzusammenhängend.

**Beweis:** Kompaktheit folgt aus Satz 5.1. Um zu zeigen, dass  $\Sigma_{N,+}$  keine isolierten Punkte hat, betrachten wir für gegebenes  $z \in \Sigma_{N,+}$  die Folge  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Folgen  $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}_0}$ , so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $x_k^n = z^k$  für  $k = 0, \dots, n-1$  und  $x_k^n \neq z_k$  für alle  $k \geq n$ . Dann gilt

$$d_{\lambda,+}(x^n, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass  $z$  nicht isoliert ist und daher  $\Sigma_{N,+}$  perfekt. Ein ähnliches Argument funktioniert für  $\Sigma_N$ . Dass  $\Sigma_{N,+}$  total unzusammenhängend ist, zeigt man am einfachsten mit Hilfe der Produkttopologie. Seien  $x, y \in \Sigma_{N,+}$  zwei verschiedene Elemente. Dann gibt es ein  $k$  mit  $i := x_k \neq y_k$ . Die Mengen  $U := \text{pr}_k^{-1}(i)$  und  $V := \bigcup_{j \neq i} \text{pr}_k^{-1}(j)$  sind als Urbilder offener Mengen in  $\Sigma_{N,+}$  offen, und offensichtlich disjunkt. Ihre Vereinigung ist  $\Sigma_{N,+}$  und es gilt  $x \in U, y \in V$ . Also liegen  $x$  und  $y$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten. Der Beweis für  $\Sigma_N$  funktioniert analog. □

**5.5 Bemerkung:** Bis auf Homöomorphie gibt es überhaupt nur einen metrischen Raum, der die drei oben genannten Eigenschaften hat (kompakt, perfekt, total unzusammenhängend). Ein weiteres Beispiel, das wir später noch kennenlernen werden, ist die sogenannte *(Mittel-Drittel) Cantor-Menge*.

**5.6 Definition:** Auf  $\Sigma_N$  und  $\Sigma_{N,+}$  definieren wir die **Shift-Abbildung**

$$\sigma_{N,(+)} : \Sigma_{N,(+)} \rightarrow \Sigma_{N,(+)}, \quad \sigma_{N,(+)}(x) = y \text{ mit } y_k = x_{k+1} \text{ für alle } k.$$

Die Shift-Abbildung schiebt also die Folgenglieder alle um einen Index weiter nach links. Im Falle von  $\sigma_{N,+}$  geht dabei das erste Folgenglied verloren.

**5.7 Satz:**  $\sigma_N : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  ist ein Homöomorphismus und  $\sigma_{N,+} : \Sigma_{N,+} \rightarrow \Sigma_{N,+}$  eine stetige Surjektion.

**Beweis:** Die Umkehrabbildung von  $\sigma_N$  ist der Rechts-Shift  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Die Surjektivität von  $\sigma_{N,+}$  ist offensichtlich. Für beliebige  $x, y \in \Sigma_{N,+}$  erhalten wir

$$d_\lambda(\sigma_{N,+}(x), \sigma_{N,+}(y)) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\delta(x_{k+1}, y_{k+1})}{\lambda^k} \leq \lambda \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^k} = \lambda d_\lambda(x, y).$$

Dies zeigt, dass  $\sigma_{N,+}$  in der Tat Lipschitz-stetig bezüglich  $d_\lambda$  ist. Betrachte nun den Shift  $\sigma_N$ :

$$\begin{aligned} d_\lambda(\sigma_N(x), \sigma_N(y)) &= \sum_{k < 0} \frac{\delta(x_{k+1}, y_{k+1})}{\lambda^{-k}} + \sum_{k \geq 0} \frac{\delta(x_{k+1}, y_{k+1})}{\lambda^k} \\ &= \sum_{k \leq 0} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{-k+1}} + \sum_{k \geq 1} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{k-1}} \\ &= \lambda^{-1} \sum_{k \leq 0} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{|k|}} + \lambda \sum_{k \geq 1} \frac{\delta(x_k, y_k)}{\lambda^{|k|}} \\ &\leq \lambda d_\lambda(x, y). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch  $\sigma_N$  Lipschitz-stetig ist. Da  $(\Sigma_N, d_\lambda)$  ein kompakter metrischer Raum ist, folgt, dass  $\sigma_N$  ein Homöomorphismus ist.  $\square$

Um die Dynamik der Shift-Abbildungen besser zu verstehen, führen wir einen weiteren Begriff ein.

**5.8 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann heißt  $f$  **positiv expansiv**, falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$  für alle  $n \geq 0$  folgt, dass  $x = y$ . Ist  $f$  invertierbar, so heißt  $f$  **expansiv**, falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  folgt, dass  $x = y$ .

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf das invertierbare System  $(\Sigma_N, \sigma_N)$  und merken nur an, dass alle Aussagen auch in analoger Form für  $(\Sigma_{N,+}, \sigma_{N,+})$  gelten.

**5.9 Definition:** Eine Menge der Form

$$Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1, \dots, n_k} := \{x \in \Sigma_N : x_{n_i} = \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, k\}$$

mit  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X_N$  heißt **Zylindermenge**. Die Mengen

$$Z_{\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n}^n := \{x \in \Sigma_N : x_i = \alpha_i \text{ für } i = -n, \dots, n\}$$

heißen **symmetrische Zylindermengen**.

**5.10 Lemma:** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen von  $X$ , deren Vereinigung  $X$  ist. Dann ist die Menge aller Vereinigungen endlicher Schnitte von Elementen von  $\mathcal{S}$  eine Topologie auf  $X$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe 1 auf Blatt 6. □

**5.11 Lemma:** Jede Zylindermenge ist offen und enthält eine symmetrische Zylindermenge. Die Zylindermengen bilden eine Basis der Topologie von  $\Sigma_N$ , d.h. jede offene Menge in  $\Sigma_N$  lässt sich als Vereinigung von Zylindermengen schreiben.

**Beweis:** Es gilt

$$Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1, \dots, n_k} = \bigcap_{i=1}^k \text{pr}_{n_i}^{-1}(\alpha_i),$$

woraus wir ersehen, dass es sich tatsächlich um offene Mengen handelt. Wählen wir  $n = \max_{i=1, \dots, k} |n_i|$ , so enthält die Zylindermenge  $Z_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^{n_1, \dots, n_k}$  eine symmetrische Zylindermenge der Form  $Z_{\beta_{-n}, \dots, \beta_n}^n$  mit  $\beta_{n_i} = \alpha_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Die Produkttopologie auf  $\Sigma_N$  war definiert als die kleinste Topologie, so dass die Mengen  $\text{pr}_n^{-1}(A)$ ,  $A \subset X_N$ , offen sind. Da alle Mengen in  $X_N$  offen sind und  $\text{pr}_n^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} \text{pr}_n^{-1}(a)$ , erhält man dieselbe Topologie, wenn man nur fordert, dass die Mengen  $\text{pr}_n^{-1}(a)$ ,  $a \in X_N$ , offen sein sollen. Nach Lemma 5.10 ist das Mengensystem, das aus allen Vereinigungen von endlichen Schnitten der Mengen  $\text{pr}_n^{-1}(a)$  besteht, eine Topologie. Diese endlichen Schnitte sind aber gerade die Zylindermengen, also bilden diese eine Basis der Topologie. □

**5.12 Satz:** Es gelten folgende Aussagen:

- (i)  $\sigma_N$  hat genau  $N^n$   $n$ -periodische Punkte für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Die Menge der periodischen Punkte  $\text{Per}(\sigma_N)$  liegt dicht in  $\Sigma_N$ .
- (iii)  $\sigma_N$  ist expansiv.

**Beweis:** Zu (i): Die  $n$ -periodischen Punkte von  $\sigma_N$  sind genau die  $n$ -periodischen Folgen  $(\dots, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, \dots)$ . Es gibt offensichtlich  $N^n$  solche Folgen. Zu (ii): Nach Lemma 5.11 reicht es zu zeigen, dass jede symmetrische Zylindermenge  $Z_\alpha^n$ ,  $\alpha = (-\alpha_n, \dots, \alpha_n)$ , einen periodischen Punkt enthält. Die  $(2n+1)$ -periodische Folge  $x$  mit  $x_i = \alpha_i$  für  $i = -n, \dots, n$  liegt offensichtlich in  $Z_\alpha^n$ . Zu (iii): Sei  $\delta = 1/2$ . Falls  $d_\lambda(\sigma_N^n(x), \sigma_N^n(y)) < \delta$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , dann gilt

$$\delta(x_k, y_k) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(x_{k+n}, y_{k+n})}{\lambda^{|n|}} = d_\lambda(\sigma_N^k(x), \sigma_N^k(y)) < 1/2$$

und daher  $x_k = y_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . □

**5.13 Definition:** Sei  $S \subset \Sigma_N$  eine nichtleere abgeschlossene Menge mit  $\sigma_N(S) = S$ . Dann nennen wir  $(S, \sigma_N|_S)$  einen **Subshift** oder ein **symbolisches dynamisches System**.

**5.14 Bemerkung:** Die dynamischen Eigenschaften unterschiedlicher Subshifts können sich sehr stark voneinander unterscheiden. Die Subshifts liefern eine große Klasse von Beispielen und Gegenbeispielen in der Theorie der dynamischen Systeme.

Wir wollen nun eine spezielle Klasse von Subshifts einführen, die sich durch Matrizen beschreiben lassen.

**5.15 Definition:** Sei  $A = (a_{ij})$  eine  $N \times N$ -Matrix mit  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  für  $1 \leq i, j \leq N$ . Dann nennen wir  $A$  eine **Transitionsmatrix**, falls

- (1)  $\sum_{i=1}^N a_{ij} \geq 1$  für  $j = 1, \dots, N$  und
- (2)  $\sum_{j=1}^N a_{ij} \geq 1$  für  $i = 1, \dots, N$ .

**5.16 Definition:** Für eine  $N \times N$ -Transitionsmatrix  $A = (a_{ij})$  definieren wir

$$\Sigma_A := \{x \in \Sigma_N \mid a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\}.$$

**5.17 Satz und Definition:** Die Menge  $\Sigma_A$  ist nichtleer, abgeschlossen und strikt vorwärtsinvariant. Folglich ist  $\sigma_A := \sigma_N|_{\Sigma_A}$  ein Subshift, ein sogenannter **Subshift von endlichem Typ** oder eine **topologische Markov-Kette**.

**Beweis:** Aus der Definition von Transitionsmatrizen folgt, dass es mindestens eine Folge  $x \in \Sigma_A$  gibt, da jede Zeile und jede Spalte mindestens eine Eins enthält. Wir können ein Element  $x \in \Sigma_A$  folgendermaßen konstruieren: Wir setzen  $x_0 := 1$ . Dann gibt es ein  $x_1 \in X_N$  mit  $a_{1x_1} = 1$ . Weiter gibt es ein  $x_2 \in X_N$  mit  $a_{x_1 x_2} = 1$ . So erhalten wir eine Folge  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Da die erste Spalte von  $A$  ungleich Null ist, gibt es ferner ein  $x_{-1}$  mit  $a_{x_{-1} 1} = 1$ . Dann gibt es ein  $x_{-2}$  mit  $a_{x_{-2} x_{-1}} = 1$ . Es ist dann die Folge  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ein Element von  $\Sigma_A$ . Aus der Definition von  $\Sigma_A$  folgt, dass  $\Sigma_A = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{-1}(\{1\})$  für  $h_k : \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a_{x_k x_{k+1}}$ . Die Abbildung  $h_k$  ist stetig, da sie lokal konstant ist. Ist nämlich der Abstand zweier Folgen  $x, y \in \Sigma_N$  klein genug, so stimmen die ersten  $k+1$  Folgenglieder von  $x$  und  $y$  überein (siehe auch Lemma 5.2). Dies zeigt, dass  $\Sigma_A$  als Schnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen in  $\Sigma_N$  ist. Offensichtlich bildet  $\sigma_N$  die Menge  $\Sigma_A$  in sich selbst ab. Um zu zeigen, dass  $\sigma_A$  surjektiv ist, sei  $x \in \Sigma_A$  beliebig gewählt. Wir definieren  $y$  durch  $y_{k+1} := x_k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Nach Konstruktion gilt  $\sigma_N(y) = x$ , und offensichtlich ist  $y \in \Sigma_A$ .  $\square$

**5.18 Definition:** Sei  $A = (a_{ij})$  eine Transitionsmatrix. Ein  $n$ -Tupel  $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$  mit  $x_i \in \{1, \dots, N\}$  heißt **Wort der Länge  $n$** . Das Wort  $x$  heißt **zulässig**, falls  $a_{x_k x_{k+1}} = 1$  für  $k = 0, \dots, n-2$ . Insbesondere ist für  $n = 1$  jedes Wort zulässig.

**5.19 Bemerkung:** Andere Interpretation: Wenn man die Elemente von  $X_N = \{1, \dots, N\}$  mit Punkten  $p_1, \dots, p_N$  identifiziert und den Punkt  $p_i$  mit  $p_j$  durch einen Pfeil verbindet, falls  $a_{ij} = 1$ , erhält man einen Graphen  $G_A$  mit  $N$  Ecken und einer gewissen Zahl von orientierten Kanten (*Markov-Graph*). Eine Folge von Ecken in diesem Graphen nennen wir zulässig, falls je zwei aufeinanderfolgende Ecken durch einen Pfeil (= orientierte Kante) verbunden sind. Ein Punkt in  $\Sigma_A$  entspricht einem beidseitig unendlichen Pfad in  $G_A$  mit einem ausgezeichneten Ursprungspunkt. Die Anwendung der topologischen Markov-Kette  $\sigma_A$  entspricht einer Verschiebung des Ursprungs zur nächsten Ecke.

**5.20 Lemma:** Sei  $A$  eine Transitionsmatrix und  $k \geq 0$ . Es gelte  $(A^k)_{ij} = p$ . Dann gibt es  $p$  zulässige Wörter der Länge  $k + 1$ , die mit  $i$  beginnen und mit  $j$  enden.

**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $k$ : Für  $k = 0$  gilt  $A^k = I$  und jedes Wort  $(w_0)$  der Länge  $k + 1 = 1$  beginnt und endet mit  $w_0$ . Daher gilt die Aussage für  $k = 0$ . Nun sei

$$n(k, i, j) := \#\{w \mid \text{Wort der Länge } k + 1 \text{ mit } w_0 = i \text{ und } w_k = j\}.$$

Jetzt nehmen wir an, dass die Behauptung für  $k - 1$  stimmt. Dann folgt

$$\begin{aligned} (A^k)_{ij} &\stackrel{(\star)}{=} \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} a_{is_1} a_{s_1 s_2} \cdots a_{s_{k-1} j} \\ &= \sum_{s_{k-1}} \left( \sum_{s_1, \dots, s_{k-2}} a_{is_1} \cdots a_{s_{k-2} s_{k-1}} \right) a_{s_{k-1} j} \\ &\stackrel{\text{I.A.}}{=} \sum_{s_{k-1}} n(k-1, i, s_{k-1}) a_{s_{k-1} j} = n(k, i, j). \end{aligned}$$

Die Gleichheit  $(\star)$  zeigt man ebenfalls mittels Induktion. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**5.21 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS mit der Eigenschaft, dass die Anzahl der  $n$ -periodischen Punkte für jedes  $n \geq 1$  endlich ist. Dann definieren wir

$$p(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \{1, \#\text{Per}_n(f)\},$$

wobei  $\#\text{Per}_n(f)$  die Anzahl der Elemente von  $\text{Per}_n(f)$  bezeichnet.

Die Größe  $p(f)$  ist die exponentielle Wachstumsrate von  $\#\text{Per}_n(f)$ . Wächst  $\#\text{Per}_n(f)$  asymptotisch wie  $Ce^{\alpha n}$ ,  $\alpha > 0$ , so gilt  $p(f) = \alpha$ , wenn wir für  $\log$  den natürlichen Logarithmus wählen. Grundsätzlich ist die Wahl der Basis des Logarithmus unerheblich. Später werden wir den Logarithmus zur Basis 2 verwenden.

**5.22 Definition:** Eine Transitionsmatrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  heißt **transitiv**, falls ein  $m \geq 1$  existiert, so dass alle Einträge von  $A^m$  positiv sind. Wir nennen  $\sigma_A$  **transitiv**, falls  $A$  transitiv ist.

Als Hilfsmittel um den folgenden Satz zu beweisen, benötigen wir den *Satz von Perron-Frobenius*, der z.B. in Katok und Hasselblatt [7, Thm. 1.9.11] bewiesen wird.

**5.23 Satz (Perron-Frobenius):** Sei  $A$  eine reelle  $N \times N$ -Matrix mit nichtnegativen Einträgen, so dass alle Einträge von  $A^n$  für ein  $n \geq 1$  positiv sind. Dann hat  $A$  (bis auf skalare Vielfache) einen eindeutig bestimmten Eigenvektor mit nichtnegativen Einträgen. Darüberhinaus gilt, dass der zugehörige Eigenwert einfach und positiv ist, und größer als die Beträge aller anderen Eigenwerte.

**5.24 Lemma:** Sei  $A$  eine Transitionsmatrix, so dass alle Einträge von  $A^m$  positiv sind. Dann sind auch für jedes  $n \geq m$  alle Einträge von  $A^n$  positiv.

**Beweis:** Wir gehen induktiv vor und nehmen an, dass  $(A^n)_{ij} > 0$  für alle  $i, j$  und ein fest gewähltes  $n \geq m$ . Dann gilt  $(A^{n+1})_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} (A^n)_{ik} a_{kj} > 0$ , da  $a_{kj} = 1$  für mindestens ein  $k$  nach der Definition von Transitionsmatrizen.  $\square$

**5.25 Satz:** Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i)  $\# \text{Per}_k(\sigma_A) = \text{Spur } A^k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Ist  $A$  transitiv, so gilt

$$p(\sigma_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \# \text{Per}_k(\sigma_A) = \log r(A),$$

wobei  $r(A)$  der Spektralradius von  $A$  ist (d.h. der Betrag des betragsgrößten Eigenwerts).

**Beweis:** Zu (i): Ein  $k$ -periodischer Punkt von  $\sigma_A$  ist eine  $k$ -periodische Folge in  $\Sigma_A$ , d.h. eine Folge der Form  $(\dots, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots)$ , so dass  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$  zulässig ist. Folglich gilt nach Lemma 5.20, dass

$$\# \text{Per}_k(\sigma_A) = \sum_{i=1}^N n(k, i, i) = \sum_{i=1}^N (A^k)_{ii} = \text{Spur } A^k.$$

Zu (ii): Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  die Eigenwerte von  $A$  (wobei diese je nach Vielfachheit mehrfach auftreten können). Sei  $\lambda_1$  ein Eigenwert mit  $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$  für  $i = 1, \dots, N$ , d.h.  $r(A) = |\lambda_1|$ . Wir wollen zeigen, dass  $|\lambda_1| \geq 1$ . Dazu nehmen wir an, das Gegenteil wäre wahr. Dann gilt  $|\lambda_i| < 1$  für  $i = 1, \dots, N$ , woraus folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Spur } A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^k + \dots + \lambda_N^k) = 0.$$

Da  $\text{Spur } A^k \in \mathbb{N}_0$ , erhalten wir  $\text{Spur } A^k = 0$  für alle  $k \geq k_0$ , wobei  $k_0$  hinreichend groß gewählt ist. Daraus folgt, dass jeder Diagonaleintrag von  $A^k$  Null ist für alle  $k \geq k_0$ , was wegen der Transitivität und Lemma 5.24 nicht möglich ist. Aus dem Lemma folgt außerdem, dass  $\text{Spur } A^k > 0$  für alle hinreichend großen  $k$ . Für diese  $k$  folgt

$$\begin{aligned} \log \# \text{Per}_k(\sigma_A) &= \log \text{Spur } A^k \\ &= \log (\lambda_1^k + \dots + \lambda_N^k) \\ &= \log \left( |\lambda_1|^k \left| 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \dots + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k \right| \right) \\ &= k \log r(A) + \log \left| 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \dots + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k \right|. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Perron-Frobenius ist  $\lambda_1$  reell und es gilt  $\lambda_1 > |\lambda_i|$  für  $i = 2, \dots, N$ . Daraus folgt, dass die Terme  $(\lambda_i/\lambda_1)^k$  für  $i \geq 2$  gegen Null konvergieren. Also folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \dots + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k \right| = 0.$$

Dies liefert mit  $\text{Spur } A^k \geq 1$  für alle  $k \geq k_0$ , dass

$$\begin{aligned} p(\sigma_A) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \max\{1, \# \text{Per}_k(\sigma_A)\} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \# \text{Per}_k(\sigma_A) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \# \text{Per}_k(\sigma_A) = \log r(A), \end{aligned}$$

was den Beweis von (ii) abschließt.  $\square$

Topologische Markov-Ketten können mit Hilfe ihrer Rekurrenz-Eigenschaften klassifiziert werden. Im Folgenden wollen wir nur die Markov-Ketten mit den stärksten Rekurrenz-Eigenschaften beschreiben (mehr in den Übungen).

**5.26 Satz:** Falls  $A$  transitiv ist, so liegen die periodischen Punkte von  $\sigma_A$  dicht in  $\Sigma_A$ .

**Beweis:** Es reicht zu zeigen, dass der Schnitt jeder Zylindermenge mit  $\Sigma_A$  einen periodischen Punkt enthält, sofern er nichtleer ist. Denn diese relativen Zylindermengen bilden eine Basis der Topologie von  $\Sigma_A$ . Wenn ein solcher Schnitt nichtleer ist, dann enthält er eine relative symmetrische Zylindermenge  $Z_{\alpha, A}^k := \Sigma_A \cap Z_{\alpha}^k$ ,  $k \geq 1$  und  $\alpha = (\alpha_{-k}, \dots, \alpha_k)$ . Dann ist  $\alpha$  ein zulässiges Wort der Länge  $2k + 1$ , d.h.  $a_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1$  für  $i = -k, \dots, k - 1$ . Es reicht daher zu zeigen, dass jede der Mengen  $Z_{\alpha, A}^k$  einen periodischen Punkt enthält. Wegen der

vorausgesetzten Transitivität können wir  $m$  so wählen, dass  $(A^m)_{\alpha_k \alpha_{-k}} > 0$ . Dies bedeutet nach Lemma 5.20, dass es ein zulässiges Wort der Länge  $m + 1$  gibt, das mit  $\alpha_k$  beginnt und mit  $\alpha_{-k}$  endet. Indem man dieses Wort hinten an das Wort  $\alpha$  anfügt, kann man  $\alpha$  erweitern zu einem zulässigen Wort der Länge  $2k + m + 1$ , das mit  $\alpha_{-k}$  beginnt und endet. Wiederholt man dieses Wort periodisch, so erhält man einen periodischen Punkt in  $Z_{\alpha, A}^k$ .  $\square$

## 6 Topologische Mischungseigenschaften und Chaos

In diesem Abschnitt wollen wir weitere Eigenschaften dynamischer Systeme einführen und untersuchen, die man im Allgemeinen verwendet um chaotische Dynamik zu charakterisieren. Zwei dieser Eigenschaften haben wir bereits kennengelernt: Die Dichtheit der periodischen Punkte im Zustandsraum (z.B. Zeltabbildung) und die Existenz von Orbits, die dicht im Zustandsraum liegen (z.B. irrationale Rotationen). Letztere Eigenschaft lässt sich auch noch anders beschreiben. Dass eine Trajektorie jedem Punkt des Zustandsraums beliebig nahe kommt, bedeutet, dass das dynamische System den Zustandsraum beliebig “durchmischt”. Als Motivation der folgenden Definition kann man auch die bei physikalischen Systemen immer vorhandenen Messfehler betrachten, aufgrund derer man statt der Trajektorie eines Punktes eher die einer offenen Umgebung dieses Punktes betrachten sollte.

**6.1 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Die Abbildung  $f$  heißt

- (i) **topologisch transitiv**, falls für jedes Paar  $(U, V)$  nichtleerer offener Teilmengen von  $X$  ein  $n \geq 1$  existiert, so dass  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ,
- (ii) **topologisch mischend**, falls für jedes Paar  $(U, V)$  nichtleerer offener Teilmengen von  $X$  ein  $n \geq 1$  existiert, so dass  $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$  für alle  $m \geq n$ ,
- (iii) **topologisch exakt**, falls für jede nichtleere offene Teilmenge  $U \subset X$  ein  $n \geq 1$  existiert mit  $f^n(U) = X$ .

**6.2 Bemerkung:**

- (1) Es gelten offensichtlich die Implikationen “topologisch exakt”  $\Rightarrow$  “topologisch mischend”  $\Rightarrow$  “topologisch transitiv”.
- (2) Ein topologisch transitives System hat keine abgeschlossenen vorwärtsinvarianten Teilmengen mit nichtleerem Inneren außer dem ganzen Zustandsraum  $X$ , denn wäre  $A$  eine solche Menge, so würde  $f^n(A^\circ) \cap (X \setminus A) = \emptyset$  für alle  $n \geq 1$  gelten.

- (3) Durch Vertauschung der Mengen  $U$  und  $V$  kann man topologische Transitivität auch so beschreiben: Für jedes Paar  $(U, V)$  nichtleerer offener Mengen in  $X$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- (4) Ist  $f$  topologisch transitiv, so ist  $f$  surjektiv. Andernfalls würde  $f^n(U) \cap V = \emptyset$  für die nichtleere offene Menge  $V := X \setminus f(X)$  und alle  $n \geq 1$  gelten.

Um den folgenden Satz über topologische Transitivität zu beweisen, benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Topologie, den sogenannten *Baire'schen Kategoriensatz*.

**6.3 Lemma:** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Ist dann  $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein abzählbar unendliches System offener dichter Teilmengen von  $X$ , so liegt auch der Schnitt  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  dicht in  $X$ .

**Beweis:** Sei  $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ . Wir müssen zeigen, dass für jede nichtleere offene Menge  $U \subset X$  der Schnitt  $U \cap M$  nichtleer ist. Weil  $O_1$  dicht in  $X$  liegt, ist die Menge  $U \cap O_1$  nichtleer. Da  $O_1$  auch offen ist, gibt es einen offenen Ball  $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U \cap O_1$ . Da  $O_2$  dicht in  $X$  liegt, ist der Schnitt  $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_2$  nichtleer. Also gibt es  $x_2 \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_2$  und  $\varepsilon_2 > 0$  mit

$$\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset B_{\varepsilon_1}(x_1), \quad \overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset O_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

So konstruiert man induktiv eine Folge  $B_{\varepsilon_n}(x_n)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\overline{B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset U$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2)  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (3)  $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset O_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Da  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , bilden die Mittelpunkte dieser Bälle eine Cauchy-Folge. Für fest gewähltes  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt ja für alle  $n, m \geq n_0$ , dass  $x_n, x_m \in B_{\varepsilon_{n_0}}(x_{n_0})$ , also

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) < 2\varepsilon_{n_0}.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Vollständigkeit gilt also  $x_n \rightarrow x$  für ein  $x \in X$ . Es gilt dann  $x \in \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}$  für alle  $n$  und nach (3) damit  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = M$  und nach (1)  $x \in B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U$ . Also enthält jede nichtleere offene Menge  $U$  mindestens ein Element von  $M$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**6.4 Bemerkung:** Oft wird der Satz von Baire auch so formuliert: Ist  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein abzählbar unendliches System abgeschlossener Teilmengen von  $X$ , so dass die Vereinigung  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$  eine nichtleere offene Menge enthält, so enthält bereits eine der Mengen  $C_n$  eine nichtleere offene Menge. Diese Version erhält man aus der obigen, indem man die Komplemente der Mengen  $O_n$  betrachtet.

**6.5 Theorem:** Für ein TDS  $(X, f)$  gelten folgende Aussagen:

- (i) Ist  $f$  topologisch transitiv, so gibt es ein  $x \in X$  mit dichtem Vorwärtsorbit  $\mathcal{O}^+(x)$ . Die Punkte mit dieser Eigenschaft liegen sogar dicht in  $X$ .
- (ii) Ist  $X$  perfekt, so gilt auch die Umkehrung von (i): Wenn ein Punkt  $x \in X$  mit dichtem Vorwärtsorbit existiert, dann ist  $f$  topologisch transitiv.

**Beweis:** Zu (i): Da  $X$  als kompakter metrischer Raum separabel ist (Übungsaufgabe 2 auf Blatt 1), existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  von  $X$ . Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig, so ist die Menge

$$A_{k,\varepsilon} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(B_\varepsilon(x_k))$$

offen wegen der Stetigkeit von  $f^n$  für jedes  $n$  und dicht in  $X$  wegen der topologischen Transitivität und Punkt (3) in Bemerkung 6.2. Nun betrachten wir nur die Mengen  $A_{k,\varepsilon_l}$ ,  $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , wobei  $(\varepsilon_l)_{l \geq 1}$  eine beliebige Nullfolge ist. Nach Lemma 6.3 liegt der Schnitt  $\bigcap_{k,l} A_{k,\varepsilon_l}$  dicht in  $X$ . (Beachte, dass  $X$  als kompakter Raum vollständig ist.) Jedes Element  $x \in \bigcap_{k,l} A_{k,\varepsilon_l}$  hat die Eigenschaft, dass  $f^n(x) \in B_{\varepsilon_l}(x_k)$  für alle  $(l,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  und  $n = n(l,k)$ . Daraus folgt die Dichtheit von  $\mathcal{O}^+(x)$  in  $X$ . Wir sehen, dass also die Punkte mit dichtem Vorwärtsorbit sogar dicht in  $X$  liegen.

Zu (ii): Es gelte  $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$  und  $U, V$  seien zwei nichtleere offene Mengen. Dann existiert  $n \geq 1$  mit  $f^n(x) \in U$ . Wähle  $y \in V$ . Da  $y$  nicht isoliert ist, finden wir eine Folge von paarweise verschiedenen Punkten  $y_k \neq y$ , die gegen  $y$  konvergiert und eine zugehörige Folge von Bällen  $B_{\varepsilon_k}(y_k)$ , die alle disjunkt voneinander sind mit  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Für alle hinreichend großen  $k$  ist  $B_{\varepsilon_k}(y_k) \subset V$ . Jeder dieser Bälle hat nichtleeren Schnitt mit  $\mathcal{O}^+(x)$ , und daher gibt es ein  $m > n$  mit  $f^m(x) \in B_{\varepsilon_k}(y_k) \subset V$ . Es folgt  $f^m(x) \in V \cap f^{m-n}(U)$ , da  $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x))$ .  $\square$

**6.6 Bemerkung:** Wir können in (ii) nicht auf die Voraussetzung verzichten, dass  $X$  perfekt ist. Dazu betrachten wir folgendes Gegenbeispiel:  $X = \{1, 2\}$  und  $f : X \rightarrow X$ ,  $f(1) = f(2) = 2$ . Der Vorwärtsorbit  $\mathcal{O}^+(1) = \{1, 2\}$  ist ganz  $X$ , aber  $f$  ist offensichtlich nicht topologisch transitiv.

Unter den bisher betrachteten Beispielen sind die folgenden topologisch transitiv:

- (1) Die irrationalen Rotationen auf dem Einheitskreis
- (2) Die Zeltabbildung (sogar topologisch exakt)
- (3) Die Winkelverdopplung (sogar topologisch exakt)
- (4) Die hyperbolischen Torusendomorphismen (möglicherweise topologisch mischend)

- (5) Die topologischen Markov-Ketten mit transitiver Transitionsmatrix (sogar topologisch mischend)

Bei den ersten dreien ist dies relativ leicht zu sehen. Irrationale Rotationen haben die Eigenschaft, dass alle Orbits dicht im Zustandsraum liegen und das Argument dafür (siehe Beispiel 3.2) kann leicht so abgewandelt werden, dass es die Dichtheit der Vorwärtsorbit liefert. Nach Übungsaufgabe 2 von Blatt 2 gibt es eine Semikonjugation  $h : S^1 \rightarrow [0, 1]$  zwischen der Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$  und der Zeltabbildung  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Können wir zeigen, dass  $f$  topologisch exakt ist, so überträgt sich dies auf  $g$ . Ist dann nämlich  $U \subset I$  eine nichtleere offene Menge, so ist auch  $h^{-1}(U) \subset S^1$  offen und nichtleer. Folglich existiert ein  $n \geq 1$  mit  $f^n(h^{-1}(U)) = S^1$ . Daraus folgt  $g^n(U) = g^n(h(h^{-1}(U))) = h(f^n(h^{-1}(U))) = h(S^1) = I$ .

**6.7 Beispiel:** Die Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ist topologisch exakt. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Folge

$$z_n := e^{2\pi i(1/2^n)}.$$

Diese Folge konvergiert sicherlich gegen 1. Die Intervalle  $[1, z_n] = \{e^{2\pi i\varphi} : 0 \leq \varphi \leq 2^{-n}\}$  werden also beliebig klein. Die Menge  $f^n([1, z_n])$  ist der gesamte Kreis, denn jeder Punkt  $w = e^{2\pi i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 1)$ , hat unter  $f^n$  das Urbild  $e^{2\pi i\varphi/2^n} \in [1, z_n]$ . Ist nun  $U \subset S^1$  eine beliebige nichtleere offene Menge, so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine Rotation  $r_c(z) = cz$ , so dass  $[1, z_n] \subset r_c(U)$ . Daraus folgt  $f^n(r_c(U)) = S^1$ . Aufgrund der Identität  $f^n \circ r_c = r_{c^{2^n}} \circ f^n$ , folgt  $f^n(U) = c^{-2^n} S^1 = S^1$ .

Die topologische Transitivität der hyperbolischen Torusendomorphismen werden wir nicht beweisen. Den Beweis für topologische Markov-Ketten mit transitiver Transitionsmatrix verlagern wir in die Übungen (siehe Aufgabe 3 auf Blatt 7).

Mit den irrationalen Rotationen und den anderen Abbildungen in der obigen Liste haben wir zwei Typen von topologisch transitiven Systemen. Solche, bei denen alle Vorwärtsorbits dicht im Zustandsraum liegen, und solche, bei denen die Menge der Punkte, die diese Eigenschaft nicht haben, dicht im Zustandsraum ist. Aus dem folgenden Theorem folgt, dass es nur diese zwei Möglichkeiten gibt.

**6.8 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann bezeichnen wir mit  $\text{tr}(f)$  die Menge aller Punkte  $x \in X$  mit  $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = X$  und mit  $\text{intr}(f) = X \setminus \text{tr}(f)$  das Komplement dieser Menge. Wir nennen die Punkte in  $\text{tr}(f)$  **transitive Punkte** und die in  $\text{intr}(f)$  **intransitive Punkte**.

**6.9 Theorem:** Sei  $(X, f)$  ein TDS mit perfektem Zustandsraum  $X$ . Dann ist  $\text{intr}(f)$  entweder leer oder dicht in  $X$ . Äquivalent dazu: Wenn  $\text{tr}(f)^\circ \neq \emptyset$ , dann ist das System minimal.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass  $\text{tr}(f)^\circ \neq \emptyset$ . Daraus folgt die topologische Transitivität des Systems nach Satz 6.5 (ii). Da jeder Urbildpunkt eines transitiven Punktes transitiv ist und der Vorwärtsorbit eines transitiven Punktes  $\text{tr}(f)^\circ$  schneidet, gilt

$$\text{tr}(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\text{tr}(f)^\circ).$$

Daher ist  $\text{tr}(f)$  offen und, da  $f$  topologisch transitiv ist, dicht in  $X$ . Dann ist  $\text{intr}(f)$  abgeschlossen und es gilt  $f(\text{tr}(f)) = \text{tr}(f)$  und  $f(\text{intr}(f)) = \text{intr}(f)$ . Die letzte Gleichheit folgt aus der ersten, da  $f^{-1}(\text{tr}(f)) \subset \text{tr}(f)$  und  $f$  nach Bemerkung 6.2 surjektiv ist. Wir wollen zeigen, dass  $\text{intr}(f) = \emptyset$ . Wir nehmen im Widerspruch dazu an, dass  $\text{intr}(f) \neq \emptyset$  und betrachten eine abgeschlossene Umgebung  $U \neq X$  der Menge  $\text{intr}(f)$ . Es gilt dann

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \text{intr}(f).$$

Ist nämlich  $x \in \text{intr}(f)$ , so gilt wegen  $f(\text{intr}(f)) = \text{intr}(f)$  natürlich  $f^n(x) \in U$  für alle  $n \geq 0$ . Gilt umgekehrt  $f^n(x) \in U$  für alle  $n \geq 0$ , so kann  $x$  kein transitiver Punkt sein, da sein Vorwärtsorbit die nichtleere offene Menge  $X \setminus U$  nicht schneidet. Die Menge  $f(X \setminus U^\circ)$  ist kompakt und disjunkt von  $\text{intr}(f)$ . Folglich existiert eine abgeschlossene Umgebung  $V$  von  $\text{intr}(f)$  mit  $V \cap f(X \setminus U^\circ) = \emptyset$  und folglich  $f^{-1}(V) \subset U$ . Daher gilt

$$\text{intr}(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \text{intr}(f).$$

Sei  $V_n := \bigcap_{k=1}^n f^{-k}(V)$ . Dann ist  $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \text{intr}(f) \subset V^\circ$ . Also existiert ein  $m \geq 1$  mit

$$V_m = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \dots \cap f^{-m}(V) \subset V^\circ,$$

denn andernfalls würde es eine Folge  $x_m \in V_m$  geben, die einen Häufungswert  $x$  hat, für den  $x \in \text{intr}(f)$  und  $x \notin V^\circ$  gilt. Jetzt definieren wir

$$W := V \cap V_{m-1} = V \cap f^{-1}(V) \cap \dots \cap f^{-(m-1)}(V).$$

Dann gilt  $W \subset V$  und  $f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \dots \cap f^{-m}(V) = V_m = V \cap V_m \subset V \cap V_{m-1} = W$ . Schließlich stellen wir fest, dass  $W$  eine abgeschlossene Umgebung von  $\text{intr}(f)$  ist. Aber die Existenz einer Menge  $W$  mit  $(X \setminus W)^\circ \neq \emptyset$ ,  $W^\circ \neq \emptyset$  und  $f^{-1}(W) \subset W$  widerspricht der topologischen Transitivität von  $f$ , denn der Vorwärtsorbit eines Punktes  $x \in \text{tr}(f) \cap (X \setminus W)$  schneidet  $W$  nicht.  $\square$

Die topologische Transitivität eines Systems ist sicherlich ein Indiz für kompliziertes dynamisches Verhalten. Am Beispiel der irrationalen Rotationen sehen wir allerdings, dass sich transitive System auch in gewisser Hinsicht sehr regulär

verhalten können. Interessanter sind die Fälle, in denen die periodischen Punkte dicht im Zustandsraum liegen. Hier können Punkte mit sehr unterschiedlichem dynamischen Verhalten beliebig nahe beieinander liegen. Eine andere Art, eine solche Eigenschaft zu beschreiben, liefert folgende Definition.

**6.10 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Wir sagen,  $f$  hat **sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten**, falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass gilt: Für jedes  $x \in X$  und jedes  $\varepsilon > 0$  existieren  $y \in X$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $d(x, y) < \varepsilon$  und  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ .

**6.11 Bemerkung:** Dies erinnert an den Begriff der positiven Expansivität, den wir im vorigen Abschnitt eingeführt haben. Expansivität ist stärker als sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten, denn bei positiver Expansivität werden beliebige zwei Punkte irgendwann um  $\delta$  separiert, während bei sensitiver Abhängigkeit nur beliebig nahe an jedem Punkt ein anderer Punkt existieren muss, so dass diese zwei schließlich um  $\delta$  separiert werden.

**6.12 Bemerkung:**

- (1) Sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten ist ein Merkmal, das für chaotisches Verhalten als typisch gilt (“Schmetterlingseffekt”).
- (2) Sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten kann offensichtlich nur dann vorliegen, wenn  $X$  perfekt ist. Denn andernfalls gibt es einen Punkt  $x \in X$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $B_\varepsilon(x)$  neben  $x$  keine weiteren Punkte enthält.

**6.13 Definition:** Ein TDS  $(X, f)$  heißt **chaotisch (im Sinne von Devaney)**, falls

- (1)  $f$  topologisch transitiv ist,
- (2)  $\text{Per}(f)$  dicht in  $X$  liegt und
- (3)  $f$  sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten hat.

Der folgende Satz zeigt, dass unter der relativ schwachen Annahme, dass der Zustandsraum keine endliche Menge ist, sensitive Abhängigkeit automatisch aus topologischer Transitivität zusammen mit der Dichtheit der periodischen Punkte folgt.

**6.14 Theorem:** Sei  $(X, f)$  ein TDS, das (1) und (2) in der Definition von Chaos erfüllt. Ferner enthalte  $X$  unendlich viele Punkte. Dann erfüllt  $(X, f)$  auch (3). (Insbesondere ist dann  $X$  perfekt.)

**Beweis:** Wir wollen zunächst bemerken, dass wir in dem Beweis die Kompaktheit von  $X$  nicht benötigen. Der Satz gilt also auch viel allgemeiner.

Zunächst stellen wir fest, dass es eine Zahl  $\delta_0 > 0$  gibt, so dass für jedes  $x \in X$  ein periodischer Punkt  $q \in X$  existiert, dessen Vorwärtsorbit mindestens den Abstand  $\delta_0/2$  von  $x$  hat. Um dies einzusehen, wählen wir zwei beliebige periodische Punkte  $q_1$  und  $q_2$  mit disjunkten Vorwärtsorbits. Diese existieren aufgrund der Voraussetzung, dass  $X$  nicht endlich ist. (Ist  $q_1$  periodisch, so ist  $X \setminus \mathcal{O}^+(q_1)$  immer noch unendlich.) Sei  $\delta_0$  der Abstand zwischen  $\mathcal{O}^+(q_1)$  und  $\mathcal{O}^+(q_2)$ , gemessen als

$$\delta_0 = \min_{(y,z) \in \mathcal{O}^+(q_1) \times \mathcal{O}^+(q_2)} d(y,z).$$

Dann hat jeder Punkt  $x \in X$  mindestens den Abstand  $\delta_0/2$  zu einem dieser periodischen Orbits, da andernfalls  $y \in \mathcal{O}^+(q_1)$  und  $z \in \mathcal{O}^+(q_2)$  existieren würden mit

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \delta_0.$$

Wir werden beweisen, dass  $f$  sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten hat mit der Sensitivitätskonstante  $\delta := \delta_0/8$ .

Sei nun  $x$  ein beliebiger Punkt in  $X$  und  $W$  eine Umgebung von  $x$ . Da die periodischen Punkte dicht in  $X$  liegen, existiert ein periodischer Punkt  $p$  in  $U = W \cap B_\delta(x)$ . Sei  $n$  die Primperiode von  $p$ . Wie wir zu Beginn gezeigt haben, existiert ein periodischer Punkt  $q \in X$ , dessen Orbit mindestens Abstand  $4\delta$  von  $x$  hat. Sei

$$V := \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

Offensichtlich ist  $V$  offen und nichtleer, da  $q \in V$ . Folglich, da  $f$  topologisch transitiv ist, existieren  $y \in U$  und  $k \geq 1$  mit  $f^k(y) \in V$ . Jetzt sei  $j$  der ganzzahlige Anteil von  $k/n + 1$ . Es gilt dann  $1 \leq nj - k \leq n$ . Denn aus  $k/n + 1 = j + r$  mit  $r \in [0, 1)$  folgt, dass  $nj - k = n(1 - r) \in (0, n] \cap \mathbb{N}_0$ . Nach Konstruktion gilt

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V) \subset B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

Ferner gilt  $f^{nj}(p) = p$ , woraus mit der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &= d(p, f^{nj}(y)) \\ &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x). \end{aligned}$$

Folglich, da  $p \in B_\delta(x)$  und  $f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ , gilt

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Dann folgt wiederum mit der Dreiecksungleichung, dass entweder  $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$  oder  $d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$ . In jedem der beiden Fälle haben wir einen Punkt in  $W$  gefunden, dessen  $nj$ -te Iteration mindestens um  $\delta$  von  $f^{nj}(x)$  entfernt ist.  $\square$

**6.15 Korollar:** Sei  $(Y, g)$  ein topologischer Faktor von  $(X, f)$ , so dass  $Y$  unendlich viele Punkte enthält. Ist dann  $(X, f)$  chaotisch, so ist auch  $(Y, g)$  chaotisch. Insbesondere gilt für zwei topologisch konjugierte TDSen  $(X, f)$  und  $(Y, g)$ :  $(X, f)$  ist genau dann chaotisch, wenn  $(Y, g)$  chaotisch ist.

**Beweis:** Zunächst zeigen wir, dass sich topologische Transitivität auf Faktoren überträgt. Es gelte also  $h \circ f = g \circ h$  mit einer stetigen Surjektion  $h : X \rightarrow Y$ . Seien  $U, V$  zwei nichtleere offene Mengen in  $Y$ . Dann sind  $h^{-1}(U), h^{-1}(V)$  nichtleere offene Mengen in  $X$ . Folglich existieren  $n \in \mathbb{N}$  und  $z$  mit  $z \in f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V)$ . Also gilt  $h(z) \in V$  und  $z = f^n(y)$  mit  $h(y) \in U$ . Dann gilt  $g^n(h(y)) = h(f^n(y)) = h(z) \in V$ . Es folgt  $g^n(h(y)) \in g^n(U) \cap V$ , womit die topologische Transitivität von  $g$  gezeigt ist. Ist  $\text{Per}(f)$  dicht in  $X$ , so folgt

$$Y = h(X) = h(\overline{\text{Per}(f)}) \subset \overline{h(\text{Per}(f))} \subset \overline{\text{Per}(g)},$$

also  $\overline{\text{Per}(g)} = Y$ . Mit Satz 6.14 folgt die Behauptung. Die zweite Aussage folgt aus der ersten, da chaotische Systeme stets unendliche (weil perfekte) Zustandsräume haben.  $\square$

Wie der folgende Satz zeigt, reicht für Systeme auf Intervallen bereits die topologische Transitivität aus, um die anderen beiden Eigenschaften von chaotischen Systemen zu erhalten. Wir beweisen zunächst zwei Lemmas.

**6.16 Lemma:** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow I$  stetig. Sei  $J \subset I$  ein kompaktes Teilintervall, so dass  $f(J) \subset J$  oder  $f(J) \supset J$ . Dann hat  $f$  einen Fixpunkt in  $J$ .

**Beweis:** Sei  $J = [a, b]$ . Im Fall  $f(J) \subset J$  müssen wir nur den Zwischenwertsatz auf die stetige Hilfsfunktion  $g(x) := f(x) - x$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , anwenden. Es gilt  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  und  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ , also existiert ein  $x \in J$  mit  $g(x) = f(x) - x = 0$ . Nun betrachten wir den zweiten Fall  $f(J) \supset J$ . Dann gibt es Punkte in  $J$ , bei denen  $f$  die Werte  $a$  und  $b$  annimmt. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass es  $x \leq y$  in  $J$  gibt mit  $f(x) = a$  und  $f(y) = b$ . Ist dies nicht der Fall, so kann man mit vertauschten Rollen von  $a$  und  $b$  analog weiter argumentieren. Dann gilt  $f(x) - x = a - x \leq 0$  und  $f(y) - y = b - y \geq 0$ . Nach dem Zwischenwertsatz muss es also ein  $z \in [x, y]$  geben mit  $f(z) - z = 0$ .  $\square$

**6.17 Lemma:** Sei  $f : I \rightarrow I$  eine stetige Intervallabbildung mit einem dichten Vorwärtsorbit. Sind dann in  $(a, b) \subset I$  keine periodischen Punkte enthalten, so gilt dasselbe für  $f^j(a, b)$  für alle  $j \geq 0$ .

**Beweis:** Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch, d.h. es existiert  $r \in (a, b)$ , so dass  $f^n(r)$  ein periodischer Punkt ist und folglich  $f^i(r) \notin (a, b)$  für alle  $i \geq n$  gilt. Es existiert ein  $x$  mit dichtem Vorwärtsorbit in  $(a, r)$  (wegen der Perfektheit von  $I$ ) und  $m > n$ , so dass  $x < f^m(x) < r$  und es gibt ein  $y$  mit dichtem Vorwärtsorbit in  $(r, b)$  und  $k > n$ , so dass  $y > f^k(y) > r$ .

Nun gilt  $u < f^m(u)$  für alle  $u \in (a, b)$ , da andernfalls nach dem Zwischenwertsatz ein Fixpunkt  $c \in (a, b)$  von  $f^m$  existieren würde, was der Annahme widerspricht, dass  $(a, b)$  frei von periodischen Punkten ist. Ferner gilt  $f^k(u) < u$ ,  $u \in (a, b)$ . Wegen Stetigkeit und  $f^m(r) \geq b$ ,  $f^k(r) \leq a$ , folgt

$$f^k([r, y]) \supset [x, r] \quad \Rightarrow \quad f^{k+m}([r, y]) \supset f^m([x, r]) \supset [r, y].$$

Dies liefert nach Lemma 6.16 einen Fixpunkt von  $f^{k+m}$  in  $[r, y] \subset (a, b)$ , ein Widerspruch.  $\square$

**6.18 Theorem:** *Ein TDS  $(I, f)$  mit  $I = [0, 1]$  ist genau dann chaotisch, wenn  $f$  topologisch transitiv ist.*

**Beweis:** Nach dem bereits Gezeigten müssen wir lediglich beweisen, dass aus der topologischen Transitivität die Dichtheit von  $\text{Per}(f)$  folgt. Wir nehmen im Widerspruch dazu an, dass  $f$  einen dichten Vorwärtsorbit hat und dass ein Intervall  $(a, b) \subset I$  existiert, das frei von periodischen Punkten ist. Dann gibt es ein maximales Intervall  $J$  mit Endpunkten  $\alpha \leq a < b \leq \beta$  mit dieser Eigenschaft. Dieses kann offen, halb-offen oder abgeschlossen sein. Dann gibt es ein  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  mit dichtem Vorwärtsorbit und ein  $m \geq 1$ , so dass

$$\alpha < x_m := f^m(x_0) < x_0.$$

Dann gilt  $f^m(\alpha, \beta) \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ , aber wegen Lemma 6.17 ist  $f^m(\alpha, \beta)$  frei von periodischen Punkten und daher gilt wegen der Maximalität von  $J$ , dass

$$f^m(\alpha, \beta) \subset J. \quad (2)$$

Da  $f^m(x_0) < x_0$ , muss  $f^m(x) < x$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$  gelten, da sonst nach dem Zwischenwertsatz ein periodischer Punkt in  $(\alpha, \beta)$  existieren würde. Daraus folgt  $f^m(\alpha) \leq \alpha$  und, zusammen mit (2), erhalten wir  $f^m([\alpha, \beta]) \subset J \cup \{\alpha\}$ , d.h.  $f^m(\alpha) = \alpha$ . Also ist  $\alpha$   $m$ -periodisch und kann folglich weder in  $J$  noch in  $f^m(\alpha, \beta)$  enthalten sein.

Es gilt daher  $x_0 > x_m > f^m(x_m) =: x_{2m} > \alpha$  (letzteres, da  $f^m(x_m) \in f^m(\alpha, \beta) \subset J$  und  $\alpha \notin J$ ). Iterieren wir dieses Argument, so erhalten wir

$$x_0 > x_m > x_{2m} > x_{3m} > \dots > \alpha.$$

Also gibt es ein  $\gamma$ , so dass  $x_{km} \searrow \gamma \geq \alpha$  für  $k \rightarrow \infty$ . Aus der Stetigkeit folgt

$$\gamma \leftarrow x_{(k+1)m} = f^m(x_{km}) \rightarrow f^m(\gamma) \quad \text{oder} \quad \gamma = f^m(\gamma).$$

Da  $(\alpha, \beta)$  frei von periodischen Punkten ist, folgt  $\gamma = \alpha$ . Der Vorwärtsorbit von  $\alpha$  ist also endlich und jede der Folgen  $(x_{nm+i})_{n \geq 0}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ , konvergiert gegen einen Punkt dieses Vorwärtsorbits. Daher kann der Vorwärtsorbit von  $x_0$  nicht dicht in  $I$  liegen.  $\square$

Im Beweis des obigen Theorems haben wir bereits wesentliche Methoden gesehen um Systeme auf Intervallen zu studieren. Diese beruhen vor allem auf der natürlichen Ordnung der reellen Zahlen und dem Zwischenwertsatz. Systeme auf Intervallen gelten schon seit längerer Zeit als sehr gut verstanden. Ein weiteres interessantes Resultat, das schon in den 1960er Jahren bewiesen wurde, ist der folgende Satz über die Existenz periodischer Punkte von Intervallabbildungen, den wir aber nicht beweisen werden.

**6.19 Theorem (Satz von Sharkovski):** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung, wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall ist. Wir definieren auf der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen folgende Ordnung:

$$\begin{aligned}
 & 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \\
 & \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \dots \\
 & \succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \succ \dots \\
 & \succ \dots \\
 & \succ 3 \cdot 2^n \succ 5 \cdot 2^n \succ 7 \cdot 2^n \succ \dots \\
 & \vdots \\
 & \succ \dots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

Hat dann  $f$  einen periodischen Punkt mit Primperiode  $p$ , so hat  $f$  auch einen periodischen Punkt mit Primperiode  $q$  für jedes  $p \succ q$  in obiger Ordnung.

Die im Theorem angegebene Ordnung der natürlichen Zahlen wird auch als *Sharkovski-Ordnung* bezeichnet. Der Beweis des Theorems beruht auf einer sehr geschickten Anwendung des Zwischenwertsatzes (bzw. Lemma 6.16).

**6.20 Bemerkung:** Wie man leicht sieht, gilt:

- Hat  $f$  einen periodischen Punkt mit Primperiode 3, so hat  $f$  periodische Punkte jeder beliebigen Primperiode.
- Hat  $f$  nur endlich viele periodische Punkte, so sind die Primperioden dieser Punkte alle Zweierpotenzen.
- Der Satz von Sharkovski gilt nicht für Kreisabbildungen wie wir am Beispiel der Rotationen um rationale Winkel sehen.

Wir wissen nun, dass unter den bisher betrachteten Beispielen die folgenden chaotisch sind:

- (1) Die Zeltabbildung
- (2) Die Winkelverdopplung
- (3) Die hyperbolischen Torusendomorphismen
- (4) Die topologischen Markov-Ketten mit transitiver Transitionsmatrix

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir noch ein weiteres Beispiel betrachten. Es handelt sich dabei um ein System, bei dem Chaos nicht auf dem ganzen Zustandsraum vorliegt, sondern nur auf einer speziellen invarianten Teilmenge. Dieses Beispiel stellt auch einen Bezug her zwischen den symbolischen Systemen des vorherigen Abschnitts und den Systemen, deren Zustandsraum eine Mannigfaltigkeit ist (Intervall, Kreis, Sphäre, Torus, etc).

Als erstes Beispiel betrachten wir die skalierte Zeltabbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|) = \begin{cases} 3x & \text{für } x \in [0, 1/2], \\ 3 - 3x & \text{für } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, dass  $f$  eine total invariante Menge in  $[0, 1]$  besitzt, die

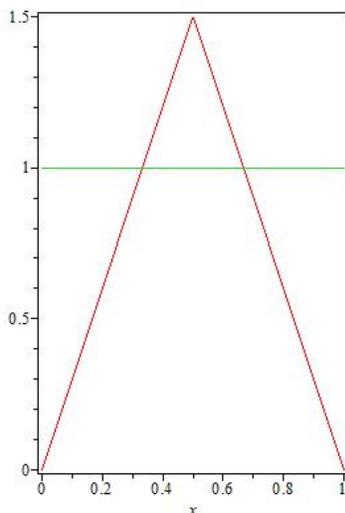


Abbildung 4: Graph der skalierten Zeltabbildung

kompakt, perfekt und total unzusammenhängend ist. Dazu definieren wir

$$\Lambda := \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}([0, 1]).$$

Offensichtlich ist dies die Menge aller Punkte in  $[0, 1]$ , deren Trajektorien  $[0, 1]$  nicht verlassen.

**6.21 Lemma:** *Die Menge  $\Lambda$  ist kompakt und nichtleer. Zudem ist sie strikt vorwärts- und rückwärtsinvariant.*

**Beweis:** Die Kompaktheit von  $\Lambda$  folgt unmittelbar aus der Definition.  $\Lambda$  ist nichtleer, da zum Beispiel  $0 \in \Lambda$ . Sei  $A_n := f^{-n}([0, 1])$ . Da es außerhalb von  $[0, 1]$  keine Punkte gibt, die nach  $[0, 1]$  abgebildet werden, gilt  $A_{n+1} \subset A_n$  für alle  $n \geq 0$ . (Ist  $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \in [0, 1]$ , so muss auch  $f^n(x) \in [0, 1]$  gelten.) Damit folgt

$$f^{-1}(\Lambda) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n+1} = A_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Lambda.$$

Da  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $(-\infty, 3/2]$  surjektiv ist, folgt daraus

$$\Lambda = f(f^{-1}(\Lambda)) = f(\Lambda),$$

womit der Beweis abgeschlossen ist.  $\square$

**6.22 Lemma:** *Es gilt*

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} : a_i \in \{0, 2\} \right\}. \quad (3)$$

**Beweis:** Wir bezeichnen die Menge auf der rechten Seite von (3) mit  $A$ . Zunächst macht man sich klar, dass  $A \subset [0, 1]$ , denn

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \leq 2 \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

Ist  $a_1 = 0$ , so folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \leq 2 \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3},$$

und ist  $a_1 = 2$ , so gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \geq \frac{2}{3}.$$

Im ersten Fall erhält man

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 3a_i 3^{-i} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-(i-1)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i} \in A.$$

Im zweiten Fall gilt

$$f(x) = 3 - \sum_{i=1}^{\infty} 3a_i 3^{-i} = 3 - 2 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} (2 - a_{i+1}) 3^{-i} \in A.$$

Da  $A$  also vorwärtsinvariant ist, folgt  $A \subset \Lambda$ . Um die umgekehrte Inklusion einzusehen, zeigen wir, dass die Trajektorien von Punkten in  $[0, 1] \setminus A$  die Menge  $[0, 1]$  verlassen. Jedes  $x \in [0, 1]$  lässt sich schreiben als<sup>14</sup>

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}, \quad a_i \in \{0, 1, 2\}.$$

Ist  $x \notin A$ , so muss  $a_i = 1$  für mindestens ein  $i$  gelten. Ist  $n$  die kleinste Zahl mit  $a_n = 1$ , so folgt ähnlich wie in den obigen Rechnungen

$$f^n(x) = \frac{1}{3} + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} b_i 3^{-i}}_{\in [0, \frac{1}{3}]}, \quad b_i \in \{0, 1, 2\}.$$

<sup>14</sup>Das ist die sogenannte *3-adische Darstellung*.

Ist eines der  $b_i$  ( $i \geq 2$ ) größer als 0 und sind nicht alle gleich 2, so folgt  $f^n(x) \in (1/3, 2/3)$  und damit  $f^{n+1}(x) \notin [0, 1]$ . Sind alle  $b_i$  gleich 0, so gilt

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{a_i}_{\in\{0,2\}} 3^{-i} + 3^{-n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-i} \in A.$$

Sind alle  $b_i = 2$ , so gilt

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + 3^{-n} + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} 3^{-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + 3^{-n} + 2 \frac{3^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + 2 \cdot 3^{-n} \in A. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**6.23 Satz:**  $\Lambda$  ist homöomorph zum Folgenraum  $\Sigma_{2,+}$ . Folglich ist  $\Lambda$  überabzählbar, perfekt und total unzusammenhängend.

**Beweis:** Wir verwenden die Darstellung (3) und definieren

$$h : \Sigma_{2,+} \rightarrow \Lambda, \quad \omega = (\omega_i)_{i \geq 0} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} 2\omega_{i-1} 3^{-i}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert und surjektiv. Gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2\omega_{i-1} 3^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 2\bar{\omega}_{i-1} 3^{-i},$$

so folgt

$$\sum_{i: \omega_{i-1}=1, \bar{\omega}_{i-1}=0} 3^{-i} = \sum_{i: \omega_{i-1}=0, \bar{\omega}_{i-1}=1} 3^{-i}.$$

Man sieht leicht, dass eine solche Gleichheit nur dann möglich ist, wenn die Indexmengen in beiden Summen leer sind. Begründung: Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass die Indexmenge auf der linken Seite ein kleineres Minimum  $n$  hat, so ist die Summe auf der linken Seite automatisch größer als die auf der rechten, denn

$$\frac{1}{3^n} > \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \sum_{i=n+1}^{\infty} 3^{-i}.$$

Folglich ist  $h$  injektiv. Die Stetigkeit sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} 2\omega_{i-1}3^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} 2\bar{\omega}_{i-1}3^{-i} \right| &= 2 \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{i-1} - \bar{\omega}_{i-1}}{3^i} \right| \\ &\leq \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\omega_i - \bar{\omega}_i|}{3^i} = \frac{2}{3} d_{3,+}(\omega, \bar{\omega}). \end{aligned}$$

Da  $\Sigma_{2,+}$  kompakt ist, ist  $h$  also ein Homöomorphismus.  $\square$

Leider ist der Homöomorphismus in obigem Beweis keine Konjugation zwischen  $f|_{\Lambda}$  und  $\sigma_2$ . Wir können aber  $\Lambda$  auch auf andere Art und Weise darstellen, so dass wir leicht eine solche Konjugation erhalten.

**6.24 Lemma:** *Die Menge  $A_n = f^{-n}([0, 1])$  ist die disjunkte Vereinigung von  $2^n$  kompakten Intervallen der Länge  $3^{-n}$ . Folglich ist  $\Lambda$  eine Lebesgue-Nullmenge.*

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage induktiv. Die Menge  $A_1$  lässt sich schreiben als

$$A_1 = f^{-1}([0, 1]) = \frac{1}{3}[0, 1] \cup \left(1 - \frac{1}{3}[0, 1]\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] =: I_0 \cup I_1.$$

Nehmen wir an, dass die Aussage auf  $A_n$  zutrifft, so ist  $A_n$  die disjunkte Vereinigung von  $2^n$  Intervallen  $I_{\omega}$  der Länge  $3^{-n}$ ,  $\omega \in \{0, 1\}^n$ . Dann sind auch die Mengen  $f^{-1}(I_{\omega})$  disjunkt. Jede dieser Mengen zerfällt in die zwei disjunkten Intervalle  $1/3I_{\omega} \subset [0, 1/3]$  und  $1 - 1/3I_{\omega} \subset [2/3, 1]$ , die jeweils die Länge  $3^{-(n+1)}$  haben. Also ist  $A_{n+1}$  die disjunkte Vereinigung von  $2^{n+1}$  Intervallen der Länge  $3^{-(n+1)}$ . Daraus folgt für das Lebesgue-Maß von  $\Lambda$ , dass  $m(\Lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n = 0$ .  $\square$

Beachte, dass die Menge  $A_{n+1}$  aus  $A_n$  entsteht, indem man aus jedem der  $2^n$  Teilintervalle das offene mittlere Drittel entfernt. Wir definieren nun die Abbildung

$$\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma_{2,+}, \quad x \mapsto (\omega_n)_{n \geq 0} \quad \text{falls } f^n(x) \in I_{\omega_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $I_0 = [0, 1/3]$  und  $I_1 = [2/3, 1]$ .

**6.25 Satz:** *Die Abbildung  $\pi$  ist eine topologische Konjugation zwischen  $f|_{\Lambda}$  und  $\sigma_{2,+}$ . Folglich ist  $f|_{\Lambda}$  chaotisch.*

**Beweis:** Die Konjugationsidentität folgt direkt aus der Definition, da für jedes  $x \in \Lambda$  gilt, dass  $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) \in I_{\omega_{n+1}}$  und damit  $\pi(f(x)) = \sigma_{2,+}(\pi(x))$ . Die Menge  $A_1$  besteht aus den zwei Intervallen  $I_0 = [0, 1/3]$  und  $I_1 = [2/3, 1]$ . Die Menge  $A_{n+1}$  besteht aus  $2^{n+1}$  Intervallen, die wir rekursiv durch  $I_{0\omega_0 \dots \omega_{n-1}} := 1/3I_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}$  und  $I_{1\omega_0 \dots \omega_{n-1}} := 1 - 1/3I_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}$  definieren.

Dann gilt  $f(I_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}) = I_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}$ . Nach Konstruktion gilt  $x \in I_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}$  genau dann, wenn  $\pi(x)_j = \omega_j$  für  $0 \leq j \leq n-1$ . Nun sei  $\omega \in \Sigma_{2,+}$  und

$$I_\omega := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{n-1}}.$$

Da  $I_{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{n-1}}$  eine monoton fallende Folge nichtleerer Intervalle ist, ist nach Lemma 4.3 auch  $I_\omega$  ein nichtleeres Intervall. Da  $|I_{\omega_0 \dots \omega_{n-1}}| = 3^{-n}$ , ist seine Länge 0, also besteht  $I_\omega$  aus nur einem Punkt  $x_\omega$ . Damit ist klar, dass  $\pi$  invertierbar ist mit  $\pi^{-1}(\omega) = x_\omega$ . Es bleibt die Stetigkeit von  $\pi$  zu zeigen. Da  $f$  stetig ist, existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\delta > 0$ , so dass aus  $|x - y| < \delta$  folgt, dass  $|f^j(x) - f^j(y)| < \varepsilon$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Für jedes hinreichend kleine  $\varepsilon$  gilt dann  $\pi(x)_j = \pi(y)_j$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Mit Lemma 5.2 folgt die Stetigkeit.  $\square$

**6.26 Bemerkung:** Die Menge  $\Lambda$  heißt auch *Mittel-Drittel-Cantormenge*. Im Allgemeinen heißt eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  *Cantor-Menge* oder *Cantor'sches Diskontinuum*, wenn sie kompakt, perfekt und total unzusammenhängend ist. Die Mittel-Drittel-Cantormenge ist das einfachste Beispiel für ein *Fraktal*, d.h. eine selbstähnliche Menge. Es gilt ja

$$\Lambda = f^{-1}(\Lambda) = 1/3\Lambda \cup (1 - 1/3)\Lambda,$$

also ist  $\Lambda$  die disjunkte Vereinigung zweier skaliertes Kopien von  $\Lambda$ . Fraktale treten häufig als invariante Mengen von dynamischen Systemen auf. Dass die Dynamik auf einer solchen invarianten Menge zu einem symbolischen System konjugiert ist, ist ebenfalls typisch.

**6.27 Bemerkung:** Die Chaos-Definition von Devaney ist eine von vielen, allerdings eine sehr gebräuchliche. Eine andere beliebte Definition ist die von Li und Yorke, die folgendermaßen aussieht: Ein TDS  $(X, f)$  ist chaotisch, falls es eine überabzählbare Menge  $S \subset X$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$  für alle  $x, y \in S, x \neq y$ .
- (ii)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$  für alle  $x, y \in S, x \neq y$ .
- (iii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0$  für alle  $x \in S, p \in X$  periodisch.

Man kann zeigen, dass eine im Sinne von Devaney chaotische Intervallabbildung auch chaotisch im Sinne von Li und Yorke ist.

## 7 Topologische Entropie

In diesem Abschnitt wollen wir ein quantitatives Maß für komplexes dynamisches Verhalten einführen.

Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so bezeichnen wir mit  $N(\mathcal{U})$  die Anzahl der Elemente einer minimalen endlichen Teilüberdeckung, die aufgrund der Kompaktheit stets existiert. Ferner definieren wir die *Entropie* von  $\mathcal{U}$  durch

$$H(\mathcal{U}) := \log N(\mathcal{U}),$$

wobei  $\log = \log_2$ . Wir wollen eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  als Hilfsmittel verstehen, verschiedene Vorwärtsorbits von  $f$  zu unterscheiden, auch wenn wir die Anfangswerte nicht genau kennen. Dies ist in folgendem Sinne zu verstehen. Nehmen wir an, wir wissen in welchen Elementen von  $\mathcal{U}$  die Punkte  $f^k(x)$  und  $f^k(y)$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  liegen. Falls dann für jedes  $k$  und jedes  $U \in \mathcal{U}$  mit  $f^k(x) \in U$  auch  $f^k(y) \in U$  gilt, so können wir nicht wissen, ob  $x = y$  oder  $x \neq y$ , andernfalls aber schon. Jedes  $x \in X$  erzeugt einen oder mehrere Pfade in  $\mathcal{U}$ , die durch die Elemente  $U_i \in \mathcal{U}$  mit  $f^i(x) \in U_i$  gegeben sind. Wir definieren die Mengen

$$U_0 \cap f^{-1}(U_1) \cap f^{-2}(U_2) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(U_{n-1}), \quad U_i \in \mathcal{U}.$$

Jede solche Menge ist offensichtlich offen und besteht genau aus den Punkten mit Pfad  $(U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$ . Wenn wir beliebige  $U_i$  zulassen, bilden diese Mengen wieder eine Überdeckung von  $X$ , die wir mit  $\mathcal{U}^n$  bezeichnen. Wir definieren die *Entropie von  $f$  bezüglich  $\mathcal{U}$*  als

$$h(f, \mathcal{U}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}^n).$$

**7.1 Definition:** Die **topologische Entropie** von  $f$  ist definiert als

$$h(f) := \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U}),$$

wobei das Supremum über alle offenen Überdeckungen von  $X$  genommen wird.

Um besser mit dieser Definition arbeiten zu können, machen wir das Ganze etwas formaler. Den Beweis des folgenden Lemmas verlegen wir in die Übungen (siehe Aufgabe 1 auf Blatt 9).

**7.2 Lemma:** Es gelten folgende Aussagen:

(i) Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so auch

$$f^{-1}\mathcal{U} := \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Ferner gilt  $H(f^{-1}\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$ . Ist  $f$  surjektiv, so gilt die Gleichheit.

(ii) Sind  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  offene Überdeckungen von  $X$ , so auch

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

(iii) Die oben eingeführte Operation  $\vee$  für offene Überdeckungen ist kommutativ und assoziativ. Ferner erfüllt sie

$$H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V}).$$

(iv) Seien  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  offene Überdeckungen von  $X$ , so dass jedes Element von  $\mathcal{V}$  in einem von  $\mathcal{U}$  enthalten ist. Dann nennen wir  $\mathcal{V}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  und schreiben  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ . Es gilt in diesem Fall

$$H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V}).$$

**7.3 Bemerkung:** Die offene Überdeckung  $f^{-1}\mathcal{U}$  wird auch als der *Pullback* von  $\mathcal{U}$  durch  $f$  bezeichnet, und  $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$  heißt die *gemeinsame Verfeinerung* von  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$ . In der Tat handelt es sich ja um eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  und von  $\mathcal{V}$ .

Die Operation  $\vee$  lässt sich natürlich rekursiv auch für mehrere offene Überdeckungen definieren. Sind  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  offene Überdeckungen von  $X$ , so definieren wir

$$\bigvee_{i=1}^n \mathcal{U}_i = \mathcal{U}_1 \vee \dots \vee \mathcal{U}_n := \mathcal{U}_1 \vee \bigvee_{i=2}^n \mathcal{U}_i.$$

Da der Urbild-Operator  $f^{-1}$  Schnitte respektiert, gilt

$$f^{-1} \bigvee_{i=1}^n \mathcal{U}_i = \bigvee_{i=1}^n f^{-1} \mathcal{U}_i.$$

Damit können wir die Überdeckung  $\mathcal{U}^n$  auch schreiben als

$$\mathcal{U}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i} \mathcal{U}.$$

Um die Existenz des Limes von  $(1/n)H(\mathcal{U}^n)$  für  $n \rightarrow \infty$  zu zeigen, benötigen wir noch folgendes kleines Lemma.

**7.4 Lemma (Subadditivitäts-Lemma):** Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine subadditive Folge reeller Zahlen, d.h.

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Dann existiert der Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$  und ist identisch mit  $\inf_{n \geq 1} a_n/n$ . Hier ist der Wert  $-\infty$  zugelassen.

**Beweis:** Sei  $\gamma := \inf_{n \geq 1} a_n/n$ . Wir fixieren eine positive Zahl  $N \in \mathbb{N}$  und schreiben jedes  $n \in \mathbb{N}$  als  $n = k_n N + r_n$  mit  $k_n \in \mathbb{N}_0$  und  $r_n \in \{0, \dots, N-1\}$ . Dann gilt  $k_n/n \rightarrow 1/N$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wegen der Subadditivität gilt für beliebige  $n, N \geq 1$ , dass

$$\gamma \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n} (k_n a_N + a_{r_n}).$$

Daher existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 = N_0(\varepsilon, N)$ , so dass für alle  $n \geq N_0$  gilt:

$$\gamma \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_N}{N} + \varepsilon,$$

Da  $N$  so gewählt werden kann, dass  $a_N/N$  beliebig nahe an  $\gamma$  liegt, und da  $\varepsilon$  und  $N$  beliebig waren, folgt das Resultat.  $\square$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Folge  $(H(\mathcal{U}^n))_{n \geq 1}$  subadditiv ist. Dies ergibt sich durch Anwendung von Lemma 7.2 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} H(\mathcal{U}^{n+m}) &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{U} \vee f^{-n} \bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) \\ &\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) + H\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) = H(\mathcal{U}^n) + H(\mathcal{U}^m). \end{aligned}$$

Bevor wir daran gehen, elementare Eigenschaften der topologischen Entropie zu beweisen, führen wir noch zwei äquivalente Definitionen ein. Zunächst definieren wir für jedes  $n \geq 1$  eine Metrik auf  $X$  durch

$$d_{n,f}(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Dass dies tatsächlich eine Metrik auf  $X$  definiert, die dieselbe Topologie erzeugt wie  $d$ , beweisen wir in einer Übungsaufgabe (siehe Aufgabe 2 auf Blatt 9). Diese Metriken werden auch als *Bowen-Metriken* bezeichnet<sup>15</sup> und die zugehörigen Bälle

$$B_\varepsilon^n(x) = \{y \in X : d_{n,f}(x, y) < \varepsilon\}$$

als *Bowen-Kugeln (der Ordnung  $n$ )*.

**7.5 Definition:** Sei  $(X, f)$  ein TDS,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$ . Eine Menge  $E \subset X$  heißt  **$(n, \varepsilon)$ -separiert** (oder  **$(n, \varepsilon, f)$ -separiert**), falls für jedes Paar  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  gilt, dass  $d_{n,f}(x, y) \geq \varepsilon$ . Eine Menge  $F \subset X$  ist  **$(n, \varepsilon)$ -aufspannend** (oder  **$(n, \varepsilon, f)$ -aufspannend**), falls zu jedem  $x \in X$  ein  $y \in F$  existiert mit  $d_{n,f}(x, y) < \varepsilon$ . In anderen Worten: Die Bowen-Kugeln der Ordnung  $n$  mit Radius  $\varepsilon$  und Mittelpunkten  $x \in F$  bilden eine Überdeckung von  $X$ . Wir bezeichnen mit  $r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f)$  die maximale Kardinalität einer  $(n, \varepsilon)$ -separierten Menge in  $X$  und mit  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f)$  die minimale Kardinalität einer  $(n, \varepsilon)$ -aufspannenden Menge. Wir definieren

$$\begin{aligned} h_{\text{sep}}(\varepsilon, f) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f), \\ h_{\text{span}}(\varepsilon, f) &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f). \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Benannt nach Rufus Bowen (1947–1978), der die äquivalenten Definitionen der topologischen Entropie eingeführt hat. Dieselben Definitionen wurden unabhängig auch von Dinaburg eingeführt.

Ferner definieren wir

$$h_{\text{sep}}(f) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} h_{\text{sep}}(\varepsilon, f), \quad h_{\text{span}}(f) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} h_{\text{span}}(\varepsilon, f).$$

**7.6 Bemerkung:** Die Limites für  $\varepsilon \searrow 0$  existieren, da aus  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  folgt, dass  $r_{\text{sep}}(n, \varepsilon_1, f) \geq r_{\text{sep}}(n, \varepsilon_2, f)$  und  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon_1, f) \geq r_{\text{span}}(n, \varepsilon_2, f)$ . Dieses Monotonie-Verhalten überträgt sich auf  $h_{\text{sep}}(\varepsilon, f)$  und  $h_{\text{span}}(\varepsilon, f)$ . Also können wir die Limites auch durch Suprema über  $\varepsilon > 0$  ersetzen. Aus der Kompaktheit von  $X$  folgt  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f), r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f) < \infty$ , denn einerseits lässt sich  $X$  mit endlich vielen  $\varepsilon$ -Bällen (in einer beliebigen Metrik) überdecken und andererseits kann es nicht unendlich viele disjunkte  $\varepsilon$ -Bälle in  $X$  geben, da es sonst Folgen ohne Häufungswerte gäbe.

**7.7 Satz:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann gilt

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} h_{\text{sep}}(\varepsilon, f) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} h_{\text{span}}(\varepsilon, f).$$

Ersetzt man in der Definition von  $h_{\text{sep}}(\varepsilon, f)$  und  $h_{\text{span}}(\varepsilon, f)$  die  $\lim \sup$ 's durch  $\lim \inf$ 's, so erhält man dasselbe Resultat.

**Beweis:** Die Größen, die wir erhalten, wenn wir  $\lim \sup$  durch  $\lim \inf$  ersetzen, bezeichnen wir mit  $\underline{h}_{\text{sep}}(f)$  und  $\underline{h}_{\text{span}}(f)$ . Wir zeigen zunächst, dass  $h_{\text{sep}}(f) = h_{\text{span}}(f)$ . Sei  $S$  eine maximale  $(n, \varepsilon)$ -separierte Menge. Dann ist  $S$  auch  $(n, \varepsilon)$ -aufspannend. Andernfalls gäbe es einen Punkt  $x \in X$  mit  $d_{n,f}(x, y) \geq \varepsilon$  für alle  $y \in S$  und  $S \cup \{x\}$  wäre eine  $(n, \varepsilon)$ -separierte Menge mit größerer Kardinalität als  $S$ . Daher gilt  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) \leq r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f)$  und damit  $h_{\text{span}}(f) \leq h_{\text{sep}}(f)$ . Sei nun  $E$  eine maximale  $(n, 2\varepsilon)$ -separierte Menge und  $S$  eine minimale  $(n, \varepsilon)$ -aufspannende Menge. Definiere eine Abbildung  $T: E \rightarrow S, x \mapsto y = T(x)$ , wobei  $y \in S$  so gewählt ist, dass  $d_{n,f}(x, y) < \varepsilon$ . Falls  $T(x_1) = T(x_2)$  für  $x_1, x_2 \in E$ , dann folgt

$$d_{n,f}(x_1, x_2) \leq d_{n,f}(x_1, y) + d_{n,f}(y, x_2) < 2\varepsilon,$$

und damit  $x_1 = x_2$ , weil  $E$  eine  $(n, 2\varepsilon)$ -separierte Menge ist. Dies liefert

$$r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) = \#S \geq \#E = r_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f).$$

Für  $n \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir  $h_{\text{span}}(f) \geq h_{\text{sep}}(f)$ .

Wir vervollständigen den Beweis, indem wir die Ungleichungen

$$h_{\text{sep}}(f) \leq h(f) \leq \underline{h}_{\text{span}}(f) \leq \underline{h}_{\text{sep}}(f)$$

zeigen. Die erste Ungleichung sieht man wie folgt ein: Sei  $\delta > 0$  und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung mit Durchmesser  $D(\mathcal{U}) < \delta$ , d.h.  $\sup_{x,y \in U} d(x, y) < \delta$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ . Sei  $E$  eine maximale  $(n, \delta)$ -separierte Menge. Dann können zwei verschiedene  $x_0, y_0 \in E$  nicht im selben Element von  $\mathcal{U}^n$  liegen, da dies  $d_{n,f}(x_0, y_0) < \delta$  implizieren würde. Folglich gilt

$$\log r_{\text{sep}}(n, \delta, f) = \log \#E \leq H(\mathcal{U}^n).$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir  $h_{\text{sep}}(\delta, f) \leq h(f, \mathcal{U})$ . Nun sei  $(\mathcal{U}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $D(\mathcal{U}_m) < 1/m$ . Nach Übungsaufgabe 3 auf Blatt 9 gilt dann

$$h_{\text{sep}}(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_{\text{sep}}\left(\frac{1}{m}, f\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} h(f, \mathcal{U}_m) = h(f),$$

was die Behauptung beweist.

Jetzt zeigen wir, dass  $h(f) \leq h_{\text{span}}(f)$ . Dazu sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  und  $\delta > 0$  die Lebesgue-Zahl von  $\mathcal{U}$ . Sei  $S$  eine minimale  $(n, \delta)$ -aufspannende Menge. Für beliebiges  $z_0 \in S$  wählen wir eine Folge  $U_0(z_0), \dots, U_{n-1}(z_0)$  in  $\mathcal{U}$  mit  $B_\delta(f^k(z_0)) \subset U_k(z_0)$ . Dann gilt

$$C(z_0) := \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(U_i(z_0)) \in \mathcal{U}^n.$$

Da  $\{C(z_0)\}_{z_0 \in S}$  eine Überdeckung von  $X$  ist, gilt

$$\log r_{\text{span}}(n, \delta, f) = \log \#S \geq H(\mathcal{U}^n).$$

Nun sei  $\mathcal{U}_k$  die offene Überdeckung, die aus allen  $1/k$ -Bällen in  $X$  besteht. Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass

$$h(f, \mathcal{U}_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{U}_k^n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}\left(n, \frac{1}{k}, f\right) \leq h_{\text{span}}(f).$$

Für  $k \rightarrow \infty$  folgt die gewünschte Ungleichung. Die verbleibende Ungleichung  $h_{\text{span}}(f) \leq h_{\text{sep}}(f)$  beweist man genauso wie  $h_{\text{span}}(f) \leq h_{\text{sep}}(f)$ .  $\square$

Nun wollen wir einige elementare Eigenschaften der topologischen Entropie herleiten. Für eine dieser Eigenschaften benötigen wir folgendes Lemma.

**7.8 Lemma:** *Für beliebige Funktionen  $f_1, \dots, f_N : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$  gilt*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i=1}^N f_i(n) \leq \max_{i=1, \dots, N} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log f_i(n).$$

**Beweis:** Wir schreiben

$$\lambda(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log f(n)$$

für eine beliebige Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ , und definieren

$$g(n) := \max_{i=1}^N f_i(n), \quad g : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty).$$

Dann gilt

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^N f_i\right) \leq \lambda(Ng) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log N + \log g(n)) = \lambda(g).$$

Folglich reicht es zu zeigen, dass  $\lambda(g) \leq \max_{i=1, \dots, N} \lambda(f_i)$ . Dazu sei  $(n_k)_{k \geq 1}$  eine Folge mit  $n_k \rightarrow \infty$  und

$$\lambda(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \log \max_{i=1, \dots, N} f_i(n_k).$$

Offensichtlich gibt es ein  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , so dass  $f_{i_0}(n_k) = \max_{i=1, \dots, N} f_i(n_k)$  für unendlich viele  $k$ . Sei  $(n_{m_k})_{k \geq 1}$  eine entsprechende Teilfolge. Dann folgt

$$\lambda(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_{m_k}} \log f_{i_0}(n_{m_k}) \leq \lambda(f_{i_0}) \leq \max_{i=1, \dots, N} \lambda(f_i),$$

womit die Aussage bewiesen ist.  $\square$

**7.9 Satz:** Die topologische Entropie hat folgende Eigenschaften:

- (i) Ist  $(Y, g)$  ein topologischer Faktor von  $(X, f)$ , so gilt  $h(g) \leq h(f)$ . Insbesondere haben topologisch konjugierte Abbildungen dieselbe Entropie.
- (ii) Es gilt

$$h(f^n) = |n|h(f) \text{ für alle } n \in \mathbb{T},$$

wobei  $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ , falls  $f$  nicht invertierbar ist und  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  sonst.

- (iii) Seien  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSe. Dann ist auch  $(X \times Y, f \times g)$ ,  $(f \times g)(x, y) := (f(x), g(y))$ , ein TDS, und es gilt

$$h(f \times g) = h(f) + h(g).$$

- (iv) Sind  $X_1, \dots, X_N \subset X$  abgeschlossene vorwärtsinvariante Teilmengen, deren Vereinigung  $X$  ist, so gilt

$$h(f) = \max_{i=1}^N h(f|_{X_i}).$$

- (v) Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen zwischen kompakten metrischen Räumen, so gilt  $h(f \circ g) = h(g \circ f)$ .

**Beweis:** Zu (i): Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $Y$  und  $\pi : X \rightarrow Y$  eine Semikonjugation zwischen  $f$  und  $g$ . Dann ist  $\pi^{-1}\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  und

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\pi^{-1}\mathcal{U} = \bigvee_{i=0}^{n-1} \pi^{-1}g^{-i}\mathcal{U} = \pi^{-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} g^{-i}\mathcal{U}.$$

Wie in Lemma 7.2 (i) folgt

$$H(\pi^{-1}\mathcal{U}^n) = H(\mathcal{U}^n) \text{ für alle } n \geq 1,$$

woraus  $h(f, \pi^{-1}\mathcal{U}) = h(g, \mathcal{U})$  folgt. Nehmen wir das Supremum über alle offenen Überdeckungen  $\mathcal{U}$  von  $Y$ , so erhalten wir

$$h(g) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \pi^{-1}\mathcal{U}) \leq h(f).$$

Zu (ii): Wir beweisen zunächst, dass  $h(f^{-1}) = h(f)$ , falls  $f$  invertierbar ist. Ist  $\mathcal{U}$  dann eine offene Überdeckung von  $X$ , so gilt

$$\begin{aligned} H(\mathcal{U}^n) &= H\left(f^{n-1} \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) \\ &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i+n-1}\mathcal{U}\right) \\ &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^{-1})^{-(n-i-1)}\mathcal{U}\right) = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^{-1})^{-i}\mathcal{U}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Nun müssen wir noch zeigen, dass  $h(f^k) = k \cdot h(f)$  für  $k \geq 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} h(f^k) &\geq h\left(f^k, \bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) \\ &= k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) = k \cdot h(f, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $h(f^k) \geq k \cdot h(f)$ . Da  $\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^k)^{-i}\mathcal{U} \prec \bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}\mathcal{U}$ , gilt weiter

$$\begin{aligned} h(f, \mathcal{U}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}\mathcal{U}\right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^k)^{-i}\mathcal{U}\right) = \frac{1}{k} h(f^k, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $k \cdot h(f) \geq h(f^k)$ , was den Beweis von (ii) abschließt.

Zu (iii): Sei  $d^X$  die Metrik auf  $X$  und  $d^Y$  die Metrik auf  $Y$ . Wir verwenden auf  $X \times Y$  die Produktmetrik

$$d^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Sei  $E_1 \subset X$  eine  $(n, \varepsilon, f)$ -aufspannende und  $E_2 \subset Y$  eine  $(n, \varepsilon, g)$ -aufspannende Menge. Dann ist  $E := E_1 \times E_2 \subset X \times Y$  eine  $(n, \varepsilon, f \times g)$ -aufspannende Menge, denn für jeden Punkt  $(x, y) \in X \times Y$  existieren  $z_1 \in E_1$  und  $z_2 \in E_2$  mit  $d_{n,f}^X(x, z_1) < \varepsilon$ ,  $d_{n,g}^Y(y, z_2) < \varepsilon$ , woraus folgt

$$\begin{aligned} d_{n,f \times g}^{X \times Y}((x, y), (z_1, z_2)) &= \max_{0 \leq i \leq n-1} \max\{d^X(f^i(x), f^i(z_1)), d^Y(g^i(y), g^i(z_2))\} \\ &= \max\{d_{n,f}^X(x, z_1), d_{n,g}^Y(y, z_2)\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f \times g) \leq r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) \cdot r_{\text{span}}(n, \varepsilon, g)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$  und daher

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f \times g) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, g). \end{aligned}$$

Damit folgt auch  $h(f \times g) \leq h(f) + h(g)$ . Ist  $F_1 \subset X$   $(n, \varepsilon, f)$ -separiert und  $F_2 \subset Y$   $(n, \varepsilon, g)$ -separiert, so ist  $F_1 \times F_2$   $(n, \varepsilon, f \times g)$ -separiert, denn für zwei verschiedene  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  in  $F_1 \times F_2$  ist  $x_1 \neq x_2$  oder  $y_1 \neq y_2$ . Damit folgt  $d_{n,f}^X(x_1, x_2) \geq \varepsilon$  oder  $d_{n,g}^Y(y_1, y_2) \geq \varepsilon$ , woraus  $d_{n,f \times g}^{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq \varepsilon$  folgt. Es folgt  $r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f \times g) \geq r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f) \cdot r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, g)$  und damit

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f \times g) \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, g). \end{aligned}$$

Daraus erhält man schließlich  $h(f \times g) \geq h(f) + h(g)$ .

Zu (iv): Offensichtlich gilt  $r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f) \geq r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, f|_{X_i})$  für alle  $i$ . Damit folgt  $h(f) \geq \max_i h(f|_{X_i})$ . Die andere Ungleichung folgt mit Lemma 7.8. Ist nämlich  $E_i \subset X_i$  eine  $(n, \varepsilon, f|_{X_i})$ -aufspannende Menge für  $i = 1, \dots, N$ , so ist  $E := \bigcup_{i=1}^N E_i$  offensichtlich eine  $(n, \varepsilon, f)$ -aufspannende Menge. Daher gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i=1}^N r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f|_{X_i}) \\ & \leq \max_{i=1}^N \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f|_{X_i}). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $h(f) \leq \max_i h(f|_{X_i})$ .

Zu (v): Übungsaufgabe 1 auf Blatt 10. □

**7.10 Beispiel:** Einige triviale Fälle, in denen die Entropie Null ist, sind die folgenden:

- (1)  $X$  ist endlich. Dann ist  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) \leq \#X$  für alle  $n \geq 1, \varepsilon > 0$ .
- (2)  $f$  ist eine schwache Kontraktion, d.h.  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$  für alle  $x, y \in X$ . Dann ist  $d_{n,f}(x, y) = d(x, y)$  für alle  $n \geq 1$ , also  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) = r_{\text{span}}(1, \varepsilon, f)$ . Insbesondere ist also die topologische Entropie einer Rotation auf dem Einheitskreis gleich Null, da es sich um eine Isometrie handelt.
- (3) Die Menge  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  der Iterierten von  $f$  ist gleichgradig stetig, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$  für alle  $n \geq 0$ , falls  $d(x, y) < \delta$ . Dann gilt  $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon^n(x)$  für alle  $n \geq 1$  und  $\varepsilon > 0$ . Damit ist  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) \leq r_{\text{span}}(1, \delta, f)$ , woraus  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) = 0$  folgt.

Da die topologische Entropie eine globale Charakteristik eines dynamischen Systems ist, liegt die Vermutung nahe, dass die Dynamik auf gewissen Teilbereichen des Zustandsraums, wo sich das System sehr regulär verhält, keinen Beitrag zur Entropie liefert. Denken wir zum Beispiel an Conley's Dekompositionssatz (Theorem 4.24), so würden wir vermuten, dass die Entropie durch die Dynamik auf der kettenrekurrenten Menge bestimmt ist. Dies ist auch richtig, und wird durch folgendes Theorem von Bowen noch verschärft. Der folgende Beweis stammt aus [1].

**7.11 Theorem:** Für jedes TDS  $(X, f)$  gilt  $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$ .

**Beweis:** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Für ein fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}^n$  eine Teilmenge, die für  $\Omega(f)$  eine minimale Teilüberdeckung ist. Die Menge  $K := X \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}_n} V$  ist kompakt und besteht aus wandernden Punkten. Daher können wir  $K$  mit endlich vielen wandernden Mengen überdecken, d.h. mit offenen Mengen  $U$ , so dass  $U \cap f^n(U) = \emptyset$  für alle  $n \geq 1$  (Teilmengen von  $X$ , nicht notwendigerweise von  $K$ ), so dass jede dieser Mengen in einem Element von  $\mathcal{U}^n$  enthalten ist. Diese Mengen bilden zusammen mit allen Elementen von  $\mathcal{V}_n$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{W}_n$  von  $X$ , die feiner ist als  $\mathcal{U}^n$ .

Jedes Element von  $(\mathcal{W}_n)_{f^n}^k$  ist von der Form

$$\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-ni}(W_i), \quad W_i \in \mathcal{W}_n.$$

Ist eine solche Menge nichtleer, so gilt: Falls  $W_i = W_j$  für  $i < j$ , so schneidet  $f^{n(j-i)}(W_i)$  die Menge  $W_i = W_j$ , also kann  $W_i$  keine wandernde Menge sein, d.h.  $W_i \in \mathcal{V}_n$ . Wandernde Mengen können sich also nicht wiederholen. Wir wollen die Anzahl der Elemente von  $(\mathcal{W}_n)_{f^n}^k$  abschätzen. Ist  $j$  die Anzahl der  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , für die  $W_i$  wandernd ist, dann gilt  $0 \leq j \leq m$  mit  $m = \#(\mathcal{W}_n \setminus \mathcal{V}_n)$ . Es gibt  $\binom{m}{j}$  Möglichkeiten eine  $j$ -elementige Teilmenge von  $\mathcal{W}_n \setminus \mathcal{V}_n$  auszuwählen und diese Mengen können auf  $k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) = k!/(k-j)!$  verschiedene Arten als  $W_i$ 's auftauchen. Für die restlichen  $W_i$ 's können wir beliebige Elemente von  $\mathcal{V}_n$  auswählen. Deshalb ist die Anzahl der Elemente von  $(\mathcal{W}_n)_{f^n}^k$  nicht größer als

$$\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \cdot \frac{k!}{(k-j)!} \cdot (\#\mathcal{V}_n)^{k-j}.$$

Da  $k!/(k-j)! \leq k^j \leq k^m$  und  $\binom{m}{j} \leq m!$ , ist diese Zahl nicht größer als  $(m+1) \cdot m! \cdot k^m \cdot (\#\mathcal{V}_n)^k$ . Folglich gilt

$$h(f^n, \mathcal{W}_n) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log((m+1)! \cdot k^m \cdot (\#\mathcal{V}_n)^k) = \log \#\mathcal{V}_n,$$

und daher gilt mit Lemma 7.2 (iv), dass

$$\begin{aligned} h(f, \mathcal{U}) &= \frac{1}{n} h(f^n, \mathcal{U}^n) \leq \frac{1}{n} h(f^n, \mathcal{W}_n) \\ &\leq \frac{1}{n} \log \# \mathcal{V}_n = \frac{1}{n} \log N((\mathcal{U}|_{\Omega(f)})^n). \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$h(f, \mathcal{U}) \leq h(f|_{\Omega(f)}, \mathcal{U}|_{\Omega(f)}) \leq h(f|_{\Omega(f)}).$$

Da  $\mathcal{U}$  beliebig gewählt war, folgt  $h(f) \leq h(f|_{\Omega(f)})$ . Die andere Ungleichung folgt aus Satz 7.9 (iv).  $\square$

**7.12 Bemerkung:** Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass  $h(f) = h(f|_{\overline{\mathcal{R}(f)}})$ .

**7.13 Beispiel:** Wir betrachten eine linear induzierte Abbildung  $f_A : S^n \rightarrow S^n$  auf der  $n$ -dimensionalen Einheitssphäre,

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}, \quad A \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{R}).$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Jordan-Normalform von  $A$  nur aus einem einzigen Jordanblock zu einem reellen Eigenwert oder zu einem komplex konjugierten Eigenwertepaar besteht. Nach Übungsaufgabe 1 auf Blatt 4 ist die nichtwandernde Menge von  $f_A$  die radiale Projektion des zugehörigen Eigenraums. Im Falle eines reellen Eigenwerts ist die Einschränkung von  $f_A$  auf  $\Omega(f_A)$  damit bis auf ein Vorzeichen die Identität, also insbesondere eine Isometrie. Theorem 7.11 zusammen mit Beispiel 7.10 (2) liefert damit  $h(f_A) = 0$ . Im Falle eines komplex konjugierten Paares von Eigenwerten wirkt  $A$  (bis auf lineare Konjugation) als Drehstreckung auf die Vektoren im reellen Eigenraum von  $A$ . Dies sieht man wie folgt: Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  das komplex konjugierte Paar von Eigenwerten. Da  $A$  invertierbar ist, sind diese ungleich Null, und wir können auch  $\alpha = r \cos(\varphi)$  und  $\beta = r \sin(\varphi)$  mit  $r > 0$  schreiben. Ist  $x \in (E_\lambda^{\mathbb{C}} \oplus E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^{n+1}$ , so gilt  $x = v + w$  mit komplexen Komponenten  $v \in E_\lambda^{\mathbb{C}}$  und  $w \in E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}$ , für die  $\text{Re}(v) = \text{Re}(w)$  und  $\text{Im}(v) = -\text{Im}(w)$  gilt, denn die Imaginärteile müssen sich aufheben, und da  $Ax$  auch reelle Komponenten hat, gilt

$$\begin{aligned} Ax &= Av + Aw = (\alpha + i\beta)(\text{Re}(v) + i\text{Im}(v)) + (\alpha - i\beta)(\text{Re}(w) - i\text{Im}(v)) \\ &= (\alpha \text{Re}(v) - \beta \text{Im}(v) + \alpha \text{Re}(w) - \beta \text{Im}(v)) \\ &\quad + i(\underbrace{\alpha \text{Im}(v) + \beta \text{Re}(v) - \alpha \text{Im}(v) - \beta \text{Re}(w)}_{=0}). \end{aligned}$$

Da der Imaginärteil von  $Ax$  verschwindet, gilt  $\text{Re}(v) = \text{Re}(w)$ . Es ergibt sich

weiter

$$\begin{aligned}
 Ax &= r \cos(\varphi) \operatorname{Re}(v) - r \sin(\varphi) \operatorname{Im}(v) + r \cos(\varphi) \operatorname{Re}(v) - r \sin(\varphi) \operatorname{Im}(v) \\
 &= r (2 \operatorname{Re}(v) \cos(\varphi) - 2 \operatorname{Im}(v) \sin(\varphi)) \\
 &= r \left( (\cos(\varphi)[\operatorname{Re}(v) + \operatorname{Im}(v)] + \sin(\varphi)[\operatorname{Re}(v) - \operatorname{Im}(v)]) \right. \\
 &\quad \left. + (-\sin(\varphi)[\operatorname{Re}(v) + \operatorname{Im}(v)] + \cos(\varphi)[\operatorname{Re}(v) - \operatorname{Im}(v)]) \right) \\
 &= r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(v) + \operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Re}(v) - \operatorname{Im}(v) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wählen wir ein geeignetes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so ist  $A$  auf dem reellen Eigenraum zu  $\alpha \pm i\beta$  also eine Drehstreckung. Bei der Projektion auf  $S^n$  verschwindet der Streckungsfaktor  $r$ . Dann ist  $f_A$  auf  $\Omega(f_A)$  eine Isometrie bezüglich einer geeigneten Metrik, also gilt auch in diesem Fall  $h(f_A) = 0$ . Man kann zeigen, dass  $h(f_A) = 0$  für beliebige Matrizen  $A \in \operatorname{Gl}(n+1, \mathbb{R})$ .

Wie wir in Übungsaufgabe 2 auf Blatt 10 gesehen haben, kann bereits eine Intervallabbildung unendliche Entropie haben. Wir wollen im Folgenden ein einfaches Kriterium für die Endlichkeit der topologischen Entropie angeben. Dazu führen wir den Begriff der Fraktal-Dimension ein (auch Box-Dimension oder kapazitive Dimension genannt).

**7.14 Definition:** Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum. Für jedes  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir mit  $N(X, \varepsilon)$  die minimale Anzahl von  $\varepsilon$ -Bällen, die nötig ist um  $X$  zu überdecken. Dann heißt

$$\dim_F(X) := \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

die **Fraktal-Dimension** von  $X$ .

**7.15 Bemerkung:** Die Definition der Fraktal-Dimension macht auch für Mengen Sinn, die total beschränkt aber nicht notwendigerweise kompakt sind.

**7.16 Beispiel:** Sei  $X = [0, 1]^n$  der kompakte Einheitsquader im  $\mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit der Standard-Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Es ist klar, dass  $N(X, \varepsilon)$  asymptotisch wächst wie  $1/\varepsilon^n$ . Damit ist

$$\dim_F([0, 1]^n) = \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \frac{-n \log \varepsilon}{-\log \varepsilon} = n.$$

Allgemein gilt für kompakte Teilmengen  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit nichtleerem Inneren, dass  $\dim_F(K) = n$ . Ebenso gilt dies für kompakte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten (z.B.  $n$ -Torus oder  $n$ -Sphäre).

**7.17 Satz:** Sei  $(X, f)$  ein TDS. Ist dann  $f$  (global) Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L(f)$  und gilt  $\dim_F(X) < \infty$ , so folgt

$$h(f) \leq \max\{0, \log L(f)\} \cdot \dim_F(X).$$

Inbesondere ist die Entropie also in diesem Fall endlich.

**Beweis:** Sei  $L := \max\{1, L(f)\}$ ,  $n \geq 1$  und  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $x, y \in X$  mit  $d(x, y) < L^{-n}\varepsilon$ . Dann gilt für beliebige  $0 \leq i \leq n-1$ , dass

$$d(f^i(x), f^i(y)) \leq L^i d(x, y) < L^{i-n}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Damit folgt

$$d_{n,f}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon.$$

Falls  $F \subset X$  eine minimale  $(n, \varepsilon)$ -aufspannende Menge ist, wird  $X$  überdeckt durch die Bowen-Kugeln der Ordnung  $n$  mit Radius  $\varepsilon$ , deren Mittelpunkte die Elemente von  $F$  sind. Jeder von diesen Bällen enthält einen  $(L^{-n}\varepsilon)$ -Ball (bezüglich der gegebenen Metrik  $d$ ), wie wir gezeigt haben. Folglich gilt

$$r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f) \leq N(X, L^{-n}\varepsilon).$$

Falls  $L^{-n}\varepsilon < 1$ , gilt  $|\log(L^{-n}\varepsilon)| = |-n \log L + \log \varepsilon| = n \log L - \log \varepsilon$ , und daher

$$n = \frac{|\log(L^{-n}\varepsilon)| + \log \varepsilon}{\log L} = \frac{|\log(L^{-n}\varepsilon)|}{\log L} \left(1 + \frac{\log \varepsilon}{|\log(L^{-n}\varepsilon)|}\right).$$

Wir dürfen annehmen, dass  $L > 1$ , und deshalb folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log \varepsilon}{|\log(L^{-n}\varepsilon)|}\right) = 1.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned} h_{\text{span}}(\varepsilon, f) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, f)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, L^{-n}\varepsilon)}{n} \\ &= \log L \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, L^{-n}\varepsilon)}{|\log(L^{-n}\varepsilon)|} \leq \log L \cdot \dim_F(X). \end{aligned}$$

Es folgt  $h(f) \leq \log L \cdot \dim_F(X)$ , wie behauptet.  $\square$

### 7.18 Bemerkung:

- Die Annahme, dass  $\dim_F(X) < \infty$  ist nötig, da ansonsten auf der rechten Seite der Abschätzung der undefinierte Wert  $0 \cdot \infty$  stehen könnte.

- Eine Verbesserung der oberen Schranke kann man manchmal erzielen durch Anwendung der Potenzregel  $h(f^n) = nh(f)$ . Damit gilt

$$h(f) \leq \left( \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \max\{0, \log L(f^n)\} \right) \cdot \dim_F(X).$$

Natürlich kann man die obere Schranke auch durch Wahl einer anderen Metrik abändern. Im Allgemeinen wird man damit trotzdem keine scharfe Schranke erhalten.

- Ist  $f$  eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer kompakten Mannigfaltigkeit oder auch auf dem Einheitsintervall, so ist eine Lipschitz-Konstante von  $f$  gegeben durch  $\max_{x \in X} \|Df(x)\|$ , die maximale Norm der Ableitung. Solche Abbildungen haben also stets endliche topologische Entropie.

Im Abschnitt über symbolische Systeme haben wir den Begriff der (positiven) Expansivität eingeführt. Hat ein System diese Eigenschaft, so lässt sich seine topologische Entropie durch die Wachstumsrate der Anzahl periodischer Punkte abschätzen.

**7.19 Satz:** *Ist  $(X, f)$  ein TDS, so dass  $f$  positiv expansiv ist, dann gilt*

$$h(f) \geq p(f),$$

wobei  $p(f)$  die Wachstumsrate der periodischen Orbits bezeichnet (siehe Definition 5.21). Dieselbe Ungleichung gilt, wenn  $f$  ein expansiver Homöomorphismus ist.

**Beweis:** Sei  $\delta > 0$  die Expansivitätskonstante. Seien  $x, y \in X$  zwei  $n$ -periodische Punkte, so dass  $d(f^k(x), f^k(y)) < \delta$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Dann gilt dies auch für alle  $k \geq 0$ , und damit folgt  $x = y$ . Daher ist die Menge  $\text{Per}_n(f)$   $(n, \delta)$ -separiert. Es folgt

$$h(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \delta, f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max\{1, \#\text{Per}_n(f)\}.$$

Den Beweis für expansive Homöomorphismen führt man analog. □

**7.20 Beispiel:** Wir betrachten die Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ . Wie in Übungsaufgabe 4 auf Blatt 5 gezeigt, ist  $f$  expandierend und damit positiv expansiv. Die Wachstumsrate der Anzahl periodischer Punkte für  $f$  ist  $\log 2$ . Also gilt  $h(f) \geq \log 2$ . Umgekehrt folgt mit Satz 7.17, dass  $h(f) \leq \log 2$ , also

$$h(f) = \log 2,$$

denn bezüglich der Standard-Metrik des Einheitskreises hat  $f$  die Lipschitz-Konstante 2 und die Fraktal-Dimension des Kreises ist natürlich 1.

Um die topologische Entropie der Zeltabbildung zu bestimmen, benötigen wir ein weiteres Resultat von Bowen.

**7.21 Theorem:** *Seien  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSe, so dass eine Semikonjugation  $h : X \rightarrow Y$  existiert. Ist dann  $\#h^{-1}(y)$  gleichmäßig beschränkt, so gilt  $h(f) = h(g)$ .*

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  fest gewählt. Sei  $C \geq 1$  eine obere Schranke für die Anzahl der Punkte in  $h^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$ . Wir werden zeigen, dass für jedes  $m \geq 1$  ein  $\beta > 0$  existiert, so dass

$$h_{\text{sep}}(2\varepsilon, f) \leq h_{\text{span}}(\beta, g) + \frac{1}{m} \log C. \quad (4)$$

Da  $h_{\text{span}}(\beta, g) \leq h(g)$ , folgt für  $m \rightarrow \infty$ , dass  $h_{\text{sep}}(2\varepsilon, f) \leq h(g)$ . Dies gilt für alle  $\varepsilon > 0$ , also folgt  $h(f) \leq h(g)$ . Die umgekehrte Ungleichung folgt mit Satz 7.9 (i). Wir müssen nun also (4) beweisen. Dazu definieren wir

$$U_y = U_{y,m,\varepsilon} := \bigcup_{z \in h^{-1}(y)} B_\varepsilon^m(z).$$

Offensichtlich ist  $U_y$  eine offene Umgebung von  $h^{-1}(y)$ . Wegen der Stetigkeit von  $h$  und der Kompaktheit von  $X$  gibt es eine offene Umgebung  $W_y$  von  $y$  in  $Y$ , so dass  $h^{-1}(W_y) \subset U_y$ . In der Tat: Gibt es keine Umgebung von  $y$  mit  $h^{-1}(W_y) \subset U_y$ , so existiert eine Folge  $y_n \rightarrow y$  mit  $h^{-1}(y_n) \not\subset U_y$ , also gibt es  $w_n \in h^{-1}(y_n)$  mit  $d_{m,f}(w_n, z) \geq \varepsilon$  für alle  $z \in h^{-1}(y)$ . Für einen Häufungspunkt  $w$  dieser Folge erhält man den Widerspruch  $h(w) = y$  und  $d_{m,f}(w, z) \geq \varepsilon$  für alle  $z \in h^{-1}(y)$ .

Wegen der Kompaktheit von  $Y$  gibt es eine endliche Teilüberdeckung  $\{W_{y_1}, \dots, W_{y_p}\}$ . Sei  $\beta > 0$  die Lebesgue-Zahl dieser Überdeckung, also die maximale Zahl  $\beta = \beta(m, \varepsilon) > 0$ , so dass jeder  $\beta$ -Ball in einer der Mengen  $W_{y_j}$  enthalten ist. Wir werden zeigen, dass

$$\frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f) \leq \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \beta, g) + \frac{1}{m} \log C + \frac{1}{n} \log C. \quad (5)$$

Daraus folgt (4), wenn wir  $n$  gegen  $\infty$  gehen lassen. Um (5) zu beweisen, werden wir die Vorwärtsorbits von  $f$  in Segmente der Länge  $m$  unterteilen. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $l \in \mathbb{N}_0$  so gewählt, dass

$$(l-1)m < n \leq lm. \quad (6)$$

Sei  $E_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f) \subset X$  eine maximale  $(n, 2\varepsilon, f)$ -separierte Menge und  $E_{\text{span}}(n, \beta, g) \subset Y$  eine minimale  $(n, \beta, g)$ -aufspannende Menge. Für  $y \in E_{\text{span}}(n, \beta, g)$  sei  $q(j, y) \in \{y_1, \dots, y_p\}$  so gewählt, dass

$$B_\beta(g^j(y)) \subset W_{q(j,y)}. \quad (7)$$

Um  $r_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f)$  mit Hilfe von  $r_{\text{span}}(n, \beta, g)$  abschätzen zu können, definieren wir

$$\varphi_l : E_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f) \rightarrow E_{\text{span}}(n, \beta, g) \times X^l, \quad \varphi_l(x) := (y; x_0, \dots, x_{l-1}),$$

wobei (1)  $d_{n,g}(y, h(x)) < \beta$  und  $y \in E_{\text{span}}(n, \beta, g)$  und (2)  $x_s \in h^{-1}(q(sm, y))$  die Bedingung  $d_{m,f}(f^{sm}(x), x_s) < \varepsilon$  für  $0 \leq s < l$  erfüllt. Dass Letzteres möglich ist, sieht man wie folgt: Da  $d_{n,g}(y, h(x)) < \beta$ , ist  $d(g^j(y), g^j(h(x))) < \beta$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Wegen (7) ist dann  $g^j(h(x)) = h(f^j(x)) \in W_{q(j,y)}$ . Wegen  $h^{-1}(W_{q(j,y)}) \subset U_{q(j,y)}$  folgt, dass  $f^j(x) \in U_{q(j,y)}$ . Dies wiederum heißt, dass ein  $z \in h^{-1}(q(j, y))$  existiert mit  $d_{m,f}(f^j(x), z) < \varepsilon$ . Für  $j = sm$  bezeichnen wir diesen Punkt  $z$  mit  $x_s$ .

Die Abbildung  $\varphi_l$  ist injektiv. Ist nämlich  $\varphi_l(w) = \varphi_l(z) = (y; x_0, \dots, x_{l-1})$ , so folgt für  $0 \leq t < m$  und  $0 \leq s < l$ , dass

$$d(f^{sm+t}(w), f^{sm+t}(z)) \leq d_{m,f}(f^{sm}(w), x_s) + d_{m,f}(x_s, f^{sm}(z)).$$

Aus  $lm \geq n$  erhalten wir  $d_{n,f}(z, w) < 2\varepsilon$ . Weil  $E_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f)$   $(n, 2\varepsilon)$ -separiert ist, folgt  $w = z$ , also die Injektivität.

Die Injektivität von  $\varphi_l$  benutzen wir jetzt, um (5) zu beweisen. Für  $y \in E_{\text{span}}(n, \beta, g)$  gilt

$$\# [\varphi_l(E_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f)) \cap (\{y\} \times X^l)] \leq \prod_{s=0}^{l-1} \#h^{-1}(q(sm, y)) \leq C^l.$$

Weil es  $r_{\text{span}}(n, \beta, g)$  verschiedene Elemente  $y \in E_{\text{span}}(n, \beta, g)$  gibt, gilt

$$r_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f) = \#\varphi_l(E_{\text{sep}}(n, 2\varepsilon, f)) \leq r_{\text{span}}(n, \beta, f) \cdot C^l.$$

Daraus ergibt sich (5), denn

$$\frac{1}{n} \log C^l = \frac{lm}{nm} \log C \stackrel{(6)}{\leq} \frac{n+m}{nm} \log C = \frac{1}{m} \log C + \frac{1}{n} \log C.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**7.22 Beispiel:** Nach Übungsaufgabe 2 von Blatt 2 wissen wir, dass es eine Semikonjugation von der Winkelverdopplung zur Zeltabbildung gibt, so dass jeder Punkt höchstens zwei Urbildpunkte hat. Damit ist also die topologische Entropie der Zeltabbildung gleich der der Winkelverdopplung,  $h(f) = \log 2$ .

Im Folgenden wollen wir die topologische Entropie von symbolischen dynamischen Systemen bestimmen. Im Beweis des folgenden Satzes verwenden wir eine geringfügig andere Definition  $(n, \varepsilon)$ -separierter Mengen, die aber den gleichen Wert für die topologische Entropie liefert (siehe Übungsaufgabe 1 auf Blatt 11).

**7.23 Satz:** Für einen Subshift  $\sigma_{N,+|S}$  gilt

$$h(\sigma_{N,+|S}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n, \quad (8)$$

wobei  $w_n$  die Anzahl der zulässigen Wörter der Länge  $n$  bezeichnet (womit hier gemeint ist, dass es eine Folge  $x \in S$  gibt, die das Wort enthält). Insbesondere ergibt sich für die topologische Entropie des vollen Shifts

$$h(\sigma_{N,+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N^n = \log N.$$

**Beweis:** Wir verwenden im Folgenden die Metrik  $d = d_{3,+}$ , d.h.

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(x_k, y_k)}{3^k}.$$

Es gilt  $d(x, y) \leq 1/2$  genau dann, wenn  $x_0 = y_0$ . Um die Entropie von  $\sigma_{N,+}|_S$  zu berechnen, verwenden wir  $(n, \varepsilon)$ -separierte Mengen. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\max_{0 \leq j \leq n-1} d(\sigma_{N,+}^j(x), \sigma_{N,+}^j(y)) \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_j = y_j \text{ für } j = 0, \dots, n-1.$$

Folglich besteht eine maximale  $(n, 2^{-1})$ -separierte Menge aus  $w_n$  Elementen, woraus folgt, dass

$$h_{\text{sep}}(\sigma_{N,+}|_S, 2^{-1}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n.$$

Wir betrachten nun die Nullfolge  $\varepsilon_k := 2^{-1}3^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $d(x, y) \leq 2^{-1}3^{-k}$  genau dann, wenn  $x_j = y_j$  für  $j = 0, \dots, k$ , und daher

$$r_{\text{sep}}(n, 2^{-1}3^{-k}, \sigma_{N,+}|_S) = r_{\text{sep}}(n+k, 2^{-1}, \sigma_{N,+}|_S).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} h(\sigma_{N,+}|_S, \varepsilon_k) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon_k, \sigma_{N,+}|_S) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n+k, 2^{-1}, \sigma_{N,+}|_S) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n, \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Verwendet man die Metrik  $d = d_5$ , so erhält man analog dieselbe Formel für die Entropie eines beidseitigen Subshifts (Übungsaufgabe 4 auf Blatt 11).

**7.24 Satz:** Für einen Subshift  $\sigma_N|_S$  gilt

$$h(\sigma_N|_S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n, \quad (9)$$

wobei  $w_n$  die Anzahl der zulässigen Wörter der Länge  $n$  bezeichnet. Insbesondere gilt für den vollen beidseitigen Subshift

$$h(\sigma_N) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N^n = \log N.$$

Mit Satz 6.25 erhalten wir folgendes Korollar.

**7.25 Korollar:** Die topologische Entropie der skalierten Zeltabbildung  $f(x) = 3/2(1 - |2x - 1|)$ , eingeschränkt auf die Mittel-Drittel-Cantormenge, ist  $\log 2$ .

**7.26 Bemerkung:** Mit Satz 7.17 erhält man aus obigem Korollar die Abschätzung  $\dim_F(\Lambda) \geq \log 2 / \log 3$  für die Fraktal-Dimension der Mittel-Drittel-Cantormenge. Man kann zeigen, dass dies sogar der exakte Wert ist.

Nun können wir auch eine Formel für die topologische Entropie einer Markov-Kette angeben.

**7.27 Korollar:** Die topologische Entropie einer topologischen Markov-Kette  $\sigma_{A,(+)}$  ist gegeben durch

$$h(\sigma_{A,(+)}) = \log r(A),$$

wobei  $r(A)$  den Spektralradius von  $A$  bezeichnet. Wenn  $A$  transitiv ist, gilt damit insbesondere  $h(\sigma_{A,(+)}) = p(\sigma_{A,(+)})$ .

**Beweis:** Die Anzahl der zulässigen Wörter der Länge  $n$  ist nach Lemma 5.20 gegeben durch

$$w_n = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n(n-1, i, j) = \sum_{i,j=1}^N (A^{n-1})_{ij} = \|A^{n-1}\|_1.$$

Damit folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \|A^{n-1}\|_1^{1/n} = \log r(A),$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. □

**7.28 Bemerkung:** Insbesondere folgt aus dem Korollar, dass der Spektralradius einer Transitionsmatrix  $\geq 1$  ist. Dies kann man auch elementarer beweisen wie folgt: Nehmen wir an, dass  $r(A) < 1$ . Dann gilt  $|\lambda_i| < 1$  für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  von  $A$ . Es folgt

$$\text{tr } A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Da  $\text{tr } A^k$  als Summe der Diagonalelemente von  $A^k$  ganzzahlig ist, folgt daraus  $\text{tr } A^k = 0$  für alle hinreichend großen  $k$ . Da zudem die Einträge von  $A^k$  nichtnegativ sind, folgt  $(A^k)_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, N$  und alle hinreichend großen  $k$ . Nach Lemma 5.20 bedeutet dies, dass es keine zulässigen Wörter der Länge  $k+1$  gibt, die mit dem selben Symbol beginnen und enden. Da in jeder Folge mindestens ein Symbol unendlich oft vorkommt, ist dies nicht möglich.

Schließlich wollen wir noch die topologische Entropie der Torusendomorphismen bestimmen. Für einen rigorosen Beweis ist noch etwas Vorarbeit nötig. Zunächst werden wir die Definition der topologischen Entropie auf Selbst-Abbildungen von nicht-kompakten metrischen Räumen erweitern. (Diese Erweiterung stammt von Bowen.) Im Folgenden wird stets  $f : X \rightarrow X$  eine gleichmäßig stetige Abbildung auf einem metrischen Raum  $(X, d)$  sein. Dann lassen sich wieder die Bowen-Metriken

$$d_{n,f}(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \geq 1,$$

definieren.

**7.29 Definition:** Sei  $f : X \rightarrow X$  eine gleichmäßig stetige Abbildung auf einem metrischen Raum  $(X, d)$ . Sei ferner  $K \subset X$  kompakt (aber nicht notwendigerweise invariant). Wir bezeichnen mit  $r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, K, f)$  die maximale Kardinalität einer in  $K$  enthaltenen  $(n, \varepsilon)$ -separierten Menge. Mit  $r_{\text{span}}(n, \varepsilon, K, f)$  bezeichnen wir die minimale Kardinalität einer Menge  $F$ , die  $K$   $(n, \varepsilon)$ -aufspannt, d.h. für jedes  $x \in K$  existiert  $y \in F$  mit  $d_{n,f}(x, y) < \varepsilon$ . Dann definieren wir

$$h_{\text{sep}}(\varepsilon, K, f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, K, f),$$

$$h_{\text{span}}(\varepsilon, K, f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{\text{span}}(n, \varepsilon, K, f).$$

Mit  $h_{\text{sep}}(K, f)$  und  $h_{\text{span}}(K, f)$  bezeichnen wir die Limes dieser Größen für  $\varepsilon \searrow 0$ . Diese beiden Größen sind gleich und wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit  $h_d(K, f)$ . Dann ist die **topologische Entropie** von  $f$  definiert als

$$h_d(f) := \sup_K h_d(K, f),$$

wobei das Supremum jeweils über alle kompakten Teilmengen  $K$  von  $X$  genommen wird.

**7.30 Bemerkung:**

- Die Existenz der Limes für  $\varepsilon \searrow 0$  folgt mit dem gleichen Argument wie im Falle eines kompakten Zustandsraums. Ebenso folgt genauso wie im kompakten Fall, dass man den gleichen Wert erhält, egal ob man minimale aufspannende oder maximale separierte Mengen betrachtet. Es gilt

$$r_{\text{span}}(n, \varepsilon, K, f) \leq r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, K, f) \leq r_{\text{span}}(n, \varepsilon/2, K, f) < \infty.$$

- Das Subskript  $d$  in  $h_d(f)$  steht für die Metrik auf  $X$ . Denn anders als zuvor hängt die Größe  $h_d(f)$  jetzt von der Metrik ab. Genauer: Sind  $d$  und  $d'$  zwei Metriken auf  $X$ , so dass die Identitätsabbildungen  $(X, d) \rightarrow (X, d')$

und  $(X, d') \rightarrow (X, d)$  beide gleichmäßig stetig sind, so gilt  $h_d(f) = h_{d'}(f)$ . Insbesondere ist dies natürlich der Fall, wenn  $X$  kompakt ist. Dann gilt

$$h_d(f) = h_d(X, f) = h(f)$$

für jede Metrik  $d$  auf  $X$ , da natürlich  $h_d(K, f) \leq h_d(K', f)$ , falls  $K \subset K'$ .

Wir wollen  $h_d(f)$  berechnen für eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn  $d$  die Euklidische Metrik ist.

**7.31 Lemma:** *Es gilt:*

- (i) *Ist  $f : X \rightarrow X$  gleichmäßig stetig, so ist  $h_d(K, f^n) = n \cdot h_d(K, f)$  für alle kompakten Mengen  $K \subset X$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Damit gilt auch  $h_d(f^n) = n \cdot h_d(f)$ .*
- (ii) *Sind  $f : X \rightarrow X$  und  $g : Y \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig, so gilt für die Produktabbildung  $f \times g : X \times Y \rightarrow X \times Y$ ,  $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ , dass*

$$h_d(f \times g) \leq h_{d_X}(f) + h_{d_Y}(g),$$

wobei die Metrik  $d$  auf  $X \times Y$  definiert ist durch

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

- (iii) *Sind  $f : X \rightarrow X$  und  $g : Y \rightarrow Y$  gleichmäßig stetig, und ist  $h : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus, so dass  $h$  und  $h^{-1}$  beide gleichmäßig stetig sind, mit  $h \circ f = g \circ h$ , so gilt  $h_{d_X}(f) = h_{d_Y}(g)$ .*
- (iv) *Ist  $f : X \rightarrow X$  eine global Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante  $L(f)$  und  $K \subset X$  eine kompakte Menge mit  $\dim_F(K) < \infty$ , so gilt*

$$h_d(K, f) \leq \max\{0, \log L(f)\} \cdot \dim_F(K).$$

**Beweis:** Analog wie im Fall eines kompakten Zustandsraums. In (ii) lässt sich allerdings die Gleichheit nicht zeigen, da anders als im kompakten Fall der Limes Superior nicht durch den Limes Inferior ersetzt werden kann (siehe Beweis von Satz 7.9 (iii)).  $\square$

**7.32 Satz:** *Ist  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung auf einem Euklidischen Vektorraum  $V$ , so gilt*

$$h_d(f) \leq \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \max\{0, n_\lambda \log |\lambda|\},$$

wobei  $\sigma(f)$  die Menge der Eigenwerte von  $f$  bezeichnet, und  $n_\lambda$  die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$ .

**Beweis:** Wir können  $V$  als direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume schreiben,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ . Jeder Eigenraum ist invariant unter  $f$ . Dann können wir  $f$  als direktes Produkt  $f = f_1 \times \dots \times f_r$  auffassen, wobei  $f_i = f|_{V_i}$ . Genauer: Wir zerlegen jedes  $v$  in Komponenten  $v = v_1 + \dots + v_r$  mit  $v_i \in V_i$  und betrachten den Homöomorphismus  $h : V \rightarrow V_1 \times \dots \times V_r$ ,  $v \mapsto (v_1, \dots, v_r)$ . Betrachten wir auf  $V_1 \times \dots \times V_r$  die Produktmetrik, so sind  $h$  und  $h^{-1}$  gleichmäßig stetig (es handelt sich ja um lineare stetige Abbildungen!) und  $h$  ist eine topologische Konjugation zwischen  $f$  und  $f_1 \times \dots \times f_r$ . Daher gilt mit Lemma 7.31

$$\begin{aligned} h_d(f) &\leq \sum_{i=1}^r h_{d_i}(f_i) \leq \sum_{i=1}^r \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_{d_i}(f_i^n) \\ &\leq \sum_{i=1}^r \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max \{0, \log \|f_i^n\|\} \cdot \dim(V_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \limsup_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ 0, \log \|f_i^n\|^{1/n} \right\} \cdot \dim(V_i). \end{aligned}$$

Bekanntlich konvergiert  $\|f_i^n\|^{1/n}$  gegen den Spektralradius von  $f_i$ . Ist  $\lambda_i$  der zu  $V_i$  gehörige Eigenwert, so ist dies  $|\lambda_i|$  und ferner gilt dann  $\dim(V_i) = n_{\lambda_i}$ . Damit folgt

$$h_d(f) \leq \sum_{i=1}^r \max \{0, n_{\lambda_i} \log |\lambda_i|\},$$

wie behauptet. □

Um auch die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, führen den Begriff eines  $f$ -homogenen Maßes ein.

**7.33 Definition:** Sei  $f : X \rightarrow X$  eine gleichmäßig stetige Abbildung. Ein Borel-Maß  $\mu$  auf  $X$  heißt  **$f$ -homogen**, falls

- (i)  $\mu(K) < \infty$  für alle kompakten Mengen  $K \subset X$ ;
- (ii)  $\mu(K) > 0$  für mindestens eine kompakte Menge  $K \subset X$ ;
- (iii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  existieren  $\delta > 0$  und  $c > 0$ , so dass

$$\mu(B_\delta^n(y)) \leq c\mu(B_\varepsilon^n(x))$$

für alle  $n \geq 0$  und  $x, y \in X$ .

Für alle solchen  $\mu$  definieren wir

$$k(\mu, f) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\varepsilon^n(x)).$$

Nach Eigenschaft (iii) hängt diese Größe nicht von  $x \in X$  ab.

Erinnerung: Ein metrischer Raum  $X$  heißt *lokal kompakt*, falls jede Umgebung  $U$  eines Punktes  $x \in X$  eine kompakte Umgebung von  $x$  enthält.

**7.34 Satz:** Sei  $f : X \rightarrow X$  eine gleichmäßig stetige Abbildung auf einem lokal kompakten metrischen Raum  $(X, d)$  und  $\mu$  ein  $f$ -homogenes Maß. Dann gilt

$$h_d(f) = k(\mu, f).$$

**Beweis:** Sei  $K \subset X$  eine kompakte Menge. Wegen der lokalen Kompaktheit existiert eine Umgebung  $U$  von  $K$  mit  $\mu(U) < \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$  klein genug gewählt, dass die  $\varepsilon$ -Umgebung  $N_\varepsilon(K) = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$  ganz in  $U$  enthalten ist. Ist  $E \subset K$  eine maximale  $(n, \varepsilon)$ -separierte Menge, so ist  $\bigcup_{x \in E} B_{\varepsilon/2}^n(x)$  eine disjunkte Vereinigung. Wir wählen  $\delta, c > 0$ , so dass  $\mu(B_\delta^n(y)) \leq c\mu(B_{\varepsilon/2}^n(x))$  für alle  $x, y \in X$  und  $n \geq 0$ . Dann gilt für einen beliebigen aber fest gewählten Punkt  $y_0 \in X$ , dass

$$r_{\text{sep}}(n, \varepsilon, K, f) \cdot \mu(B_\delta^n(y_0)) = \sum_{x \in E} \mu(B_\delta^n(y_0)) \leq \sum_{x \in E} c\mu(B_{\varepsilon/2}^n(x)) \leq c\mu(U),$$

und folglich

$$h_{\text{sep}}(\varepsilon, K, f) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\delta^n(y_0)).$$

Wenn  $\varepsilon \searrow 0$ , können wir auch  $\delta = \delta(\varepsilon) \searrow 0$  annehmen und damit folgt  $h_d(f) \leq k(\mu, f)$ .

Nun sei  $K \subset X$  eine kompakte Menge mit  $\mu(K) > 0$ . Falls  $F$  eine minimale Menge ist, die  $K$   $(n, \delta)$ -aufspannt, gilt

$$\bigcup_{x \in F} B_\delta^n(x) \supset K.$$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta, c > 0$ , so dass  $\mu(B_\delta^n(x)) \leq c\mu(B_\varepsilon^n(y))$  für alle  $x, y \in X$  und  $n \geq 0$ . Dann gilt

$$r_{\text{span}}(n, \delta, K, f) \cdot c\mu(B_\varepsilon^n(y_0)) \geq \sum_{x \in F} \mu(B_\delta^n(x)) \geq \mu\left(\bigcup_{x \in F} B_\delta^n(x)\right) \geq \mu(K) > 0.$$

Daraus folgt die umgekehrte Ungleichung.  $\square$

**7.35 Satz:** Ist  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung auf einem Euklidischen Vektorraum  $V$ , so gilt

$$h_d(f) = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \max\{0, n_\lambda \log |\lambda|\},$$

wobei  $\sigma(f)$  die Menge der Eigenwerte von  $f$  bezeichnet, und  $n_\lambda$  die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts  $\lambda$ .

**Beweis:** Wir müssen nur noch die Ungleichung “ $\geq$ ” beweisen. Dazu sei  $V^+$  die direkte Summe aller verallgemeinerten Eigenräume von  $f$  zu Eigenwerten mit Betrag  $> 1$  und  $f^+ := f|_{V^+}$ . Dann ist insbesondere  $f^+$  invertierbar und es gilt  $h_d(f) \geq h_d(f^+)$ . (Betrachte nur die kompakten Teilmengen von  $V$ , die in  $V^+$  liegen.) Sei  $\mu$  das Standard-Lebesgue-Maß auf  $V^+$ . Wegen

$$B_\varepsilon^n(0; f^+) \subset (f^+)^{-n} B_\varepsilon(0; V^+)$$

gilt

$$\mu(B_\varepsilon^n(0; f^+)) \leq \mu(B_\varepsilon(0; V^+)) \cdot |\det(f^+)^{-n}| = \frac{\mu(B_\varepsilon(0; V^+))}{|\det f^+|^n}.$$

Das Maß  $\mu$  ist offensichtlich  $f$ -homogen, da die Bowen-Kugeln der Ordnung  $n$  und Radius  $\varepsilon$  einer linearen Abbildung sich nur um Translationen unterscheiden:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon^n(x) - x &= \left\{ y - x \in V : \max_{0 \leq i \leq n-1} \|f^i(x - y)\| < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ z \in V : \max_{0 \leq i \leq n-1} \|f^i z\| < \varepsilon \right\} = B_\varepsilon^n(0). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$k(\mu, f^+) \geq \log |\det f^+| = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \max\{0, n_\lambda \log |\lambda|\},$$

womit der Beweis unter Verwendung von Satz 7.34 abgeschlossen ist.  $\square$

Um nun die Entropie der Torus-Endomorphismen zu bestimmen, benötigen wir noch das folgende Resultat, das ein bißchen aus der mengentheoretischen Topologie hinausführt.

**7.36 Satz:** Seien  $f : N \rightarrow N$ ,  $g : M \rightarrow M$  und  $\pi : N \rightarrow M = \pi(N)$  stetig differenzierbare Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, so dass  $\pi \circ f = g \circ \pi$ . Seien  $d$  und  $d'$  Metriken auf  $N$  und  $M$ . Sei  $\mu$  ein glattes Maß auf  $N$ , das  $f$ -homogen (bzgl.  $d$ ) ist und  $\mu'$  ein glattes Maß auf  $M$ , das  $g$ -homogen (bzgl.  $d'$ ) ist. Schließlich sei  $x \in N$  ein Fixpunkt von  $f$  und  $\pi|_U$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus einer Umgebung  $U$  von  $x$  auf eine Umgebung  $V$  von  $\pi(x)$ . Dann gilt

$$h_d(f) = k(\mu, f) = k(\mu', g) = h_{d'}(g).$$

**Beweis:** Es reicht zu zeigen, dass  $k(\mu, f) = k(\mu', g)$ . Sei dazu  $U_1 \subset U$  eine Umgebung von  $x$  mit  $f(U_1) \subset U$  und  $\bar{U}_1 \subset U$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset U_1$ . Da  $\pi|_U$  als  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus lokal Lipschitz-stetig und offen ist, gibt es  $a(\varepsilon), b(\varepsilon) > 0$  mit

$$B_{a(\varepsilon)}(\pi(x)) \subset \pi(B_\varepsilon(x)) \subset B_{b(\varepsilon)}(\pi(x)).$$

Dann folgt

$$B_{a(\varepsilon)}^n(\pi(x); g) \subset \pi(B_\varepsilon^n(x; f)) \subset B_{b(\varepsilon)}^n(\pi(x); g),$$

denn da  $\pi(x)$  ein Fixpunkt von  $g$  ist, gilt

$$\begin{aligned} B_{a(\varepsilon)}^n(\pi(x); g) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} g^{-i} B_{a(\varepsilon)}(\pi(x)) \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} g^{-i} \pi(B_\varepsilon(x)) \\ &= \bigcap_{i=0}^{n-1} \pi f^{-i} B_\varepsilon(x) = \pi(B_\varepsilon^n(x; f)), \end{aligned}$$

und ähnlich für die zweite Inklusion. Da  $\pi|_U$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus ist,  $\mu$  und  $\mu'$  glatte Maße und  $\bar{U}_1$  eine kompakte Teilmenge von  $U$  (wenn klein genug gewählt), gibt es  $C_1, C_2 > 0$ , so dass für jede Menge  $E \subset U_1$  gilt

$$C_1 \mu'(\pi(E)) \leq \mu(E) \leq C_2 \mu'(\pi(E)).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu'(B_{a(\varepsilon)}^n(\pi(x); f)) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\varepsilon^n(x; f)) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu'(B_{b(\varepsilon)}^n(\pi(x); g)). \end{aligned}$$

Wir können  $a(\varepsilon), b(\varepsilon)$  offensichtlich so wählen, dass  $a(\varepsilon), b(\varepsilon) \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dann folgt  $k(\mu', g) \geq k(\mu, f) \geq k(\mu', g)$ .  $\square$

**7.37 Theorem:** Die topologische Entropie eines linearen Torus-Endomorphismus  $f_A : T^n \rightarrow T^n$  ist gegeben durch

$$h(f_A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \max\{0, n_\lambda \log |\lambda|\}.$$

**Beweis:** Wir betrachten die kanonische Projektion  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . Dies ist eine surjektive stetig differenzierbare Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Ebenso sind  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f_A : T^n \rightarrow T^n$  stetig differenzierbar und es gilt  $\pi \circ A = f_A \circ \pi$ . Das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  ist  $A$ -homogen und das induzierte Lebesgue-Maß auf  $T^n$  ist  $f_A$ -homogen. Dabei verwenden wir auf  $T^n$  die in Beispiel 3.6 eingeführte Metrik. Der Ursprung  $0 \in \mathbb{R}^n$  ist ein Fixpunkt von  $A$  und lokal ist  $\pi$  bei 0 ein Diffeomorphismus (sogar eine Isometrie). Deshalb kann man Satz 7.36 anwenden und erhält, dass die Entropie von  $f_A$  gleich der von  $A$  ist. Mit Satz 7.35 folgt die Behauptung.  $\square$

**7.38 Bemerkung:** Auf dieselbe Art und Weise lässt sich die Entropie eines beliebigen Liegruppen-Endomorphismus bezüglich einer rechtsinvarianten Metrik bestimmen. Im Allgemeinen ist die zugehörige lineare Abbildung die Ableitung des Endomorphismus im neutralen Element der Liegruppe,<sup>16</sup> und die Semikonjugation  $\pi$  ist die Liegruppen-Exponentialabbildung. Siehe auch Bowen [4, 5].

<sup>16</sup>Siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Gruppe>.

Damit haben wir für alle in der Vorlesung behandelten Beispiele die topologische Entropie bestimmt. Hier nochmal ein Überblick:

- Homöomorphismen des Einheitsintervalls  $f : I \rightarrow I$  oder Einheitskreises  $f : S^1 \rightarrow S^1$  (insbesondere Rotationen):

$$h(f) = 0.$$

- Zeltabbildung  $f : I \rightarrow I$ ,  $f(x) = 1 - |2x - 1|$ :

$$h(f) = \log 2.$$

- Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ :

$$h(f) = \log 2.$$

- Torus-Endomorphismen  $f_A : T^n \rightarrow T^n$ ,  $f_A([x]) = [Ax]$ :

$$h(f_A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \max\{0, n_\lambda \log |\lambda|\}.$$

- Linear induzierte Abbildungen auf der Einheitssphäre  $f_A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $f_A(x) = Ax/\|Ax\|$ :

$$h(f_A) = 0.$$

- Subshifts  $\sigma_{N,(+)} : \Sigma_{N,(+)} \rightarrow \Sigma_{N,(+)}$ :

$$h(\sigma_{N,(+)}|_S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n,$$

$w_n =$  Anzahl der zulässigen Wörter der Länge  $n$ .

- Topologische Markov-Ketten  $\sigma_{A,(+)} : \Sigma_{A,(+)} \rightarrow \Sigma_{A,(+)}$ :

$$h(\sigma_{A,(+)}) = \log r(A),$$

$r(A) =$  Spektralradius der Transitionsmatrix.

- Skalierte Zeltabbildung auf der Mittel-Drittel-Cantormenge  $f|_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$ ,  $f(x) = 3/2(1 - |2x - 1|)$ :

$$h(f|_\Lambda) = \log 2.$$

## 8 Literaturhinweise

Hier noch ein paar Literaturhinweise zur Vertiefung des behandelten Stoffs. Die meisten Beweise der Vorlesung stammen auch aus diesen Quellen.

- Rekurrenz: Abschnitt 3.3 in Katok und Hasselblatt [7];
- Conley's Dekompositionssatz: Easton [6];
- Symbolische Dynamik: Abschnitt 1.9 in Katok und Hasselblatt [7];
- Topologische Transitivität: Kolyada und Snoha [8];
- Chaos: Aulbach und Kieninger [2], Banks et al. [3], Li und Yorke [9];
- Topologische Entropie: Abschnitte 3.1 und 3.2 bei Katok und Hasselblatt [7], Robinson [11], Bowen [4], Alsedà et al. [1] (weitere Literatur: siehe Überblicksartikel [http://www.math.uni-augsburg.de/prof/lam/Mitarbeiter/christoph\\_kawan/Publikationen/Entropy\\_v30.pdf](http://www.math.uni-augsburg.de/prof/lam/Mitarbeiter/christoph_kawan/Publikationen/Entropy_v30.pdf) auf meiner Homepage).

## 9 Übungsaufgaben

### Blatt 1

#### Aufgabe 1: Kompakte metrische Räume I

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) Jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
- (2) Jede Folge in  $X$  hat eine konvergente Teilfolge.
- (3)  $X$  ist vollständig und total beschränkt. (Zur Erinnerung: Vollständigkeit bedeutet, dass jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert. Totale Beschränktheit heißt, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  bereits endlich viele  $\varepsilon$ -Bälle zur Überdeckung von  $X$  genügen.)

#### Aufgabe 2: Kompakte metrische Räume II

Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

- (a) Zu jeder offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  existiert eine Zahl  $\varepsilon > 0$ , so dass jeder  $\varepsilon$ -Ball in  $X$  in mindestens einem Element von  $\mathcal{U}$  als Teilmenge enthalten ist. (Die größte solche Zahl heißt *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung.)

- (b)  $X$  ist separabel, d.h.  $X$  hat eine abzählbare dichte Teilmenge.
- (c) Eine Teilmenge  $K \subset X$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.
- (d) Jede stetige invertierbare Abbildung  $f : X \rightarrow X$  ist ein Homöomorphismus.

### Aufgabe 3: Gruppenwirkungen und Halbgruppenwirkungen

Sei  $\Phi : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenwirkung, d.h.  $G$  ist eine Gruppe,  $X$  eine nichtleere Menge, und es gilt  $\Phi(e, x) = x$  ( $e =$  neutrales Element) sowie  $\Phi(gh, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ . Der Orbit eines Elements  $x \in X$  ist die Menge  $\mathcal{O}(x) = \{\Phi(g, x) : g \in G\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die verschiedenen Orbits eine disjunkte Zerlegung von  $X$  bilden. In anderen Worten: Die Relation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{O}(y)$$

ist eine Äquivalenzrelation auf  $X$ .

- (b) Dieselben Definitionen machen Sinn, wenn  $G$  nur eine Halbgruppe ist (d.h. es gelten alle Gruppenaxiome bis auf die Existenz von Inversen). In diesem Fall sprechen wir von einer Halbgruppenwirkung. Zeigen Sie, dass die Orbits einer Halbgruppenwirkung auf  $X$  nicht notwendigerweise eine disjunkte Zerlegung von  $X$  liefern.

### Aufgabe 4: Fixpunkte

- (a) Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz: Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Kontraktion, d.h.  $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  mit einer Konstante  $K \in [0, 1)$ . Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in X$  und für jedes  $x \in X$  gilt, dass  $f^n(x) \rightarrow x^*$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (b) Zeigen Sie: Ist  $f : X \rightarrow X$  eine beliebige stetige Abbildung auf einem metrischen Raum  $(X, d)$ , und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$  für gewisse  $x, x^* \in X$ , so ist  $x^*$  ein Fixpunkt von  $f$ .

## Blatt 2

### Aufgabe 1: Topologische Konjugation I

Beweisen Sie den Satz 2.21 der Vorlesung: Seien  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSen.

- (a) Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine topologische Konjugation. Dann gilt: Ist  $x \in X$  ein periodischer Punkt von  $f$  mit Primperiode  $n$ , so ist  $h(x) \in Y$  ein periodischer Punkt von  $g$  mit derselben Primperiode. Ferner gilt  $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$  für alle  $x \in X$ .

- (b) Sei  $h : X \rightarrow Y$  eine topologische Semikonjugation. Dann gilt: Ist  $x \in X$  ein periodischer Punkt von  $f$ , so ist  $h(x)$  ein periodischer Punkt von  $g$  (aber nicht notwendigerweise mit derselben Primperiode). Ferner gilt  $h(\omega(x, f)) \subset \omega(h(x), g)$  für alle  $x \in X$ .

### Aufgabe 2: Topologische Konjugation II

Wir betrachten die Zeltabbildung  $f : I \rightarrow I$ ,  $f(x) = 1 - |2x - 1|$ , aus Beispiel 3.3 der Vorlesung.

- (a) Die Abbildung  $g : I \rightarrow I$ ,  $g(x) = 4x(1 - x)$ , heißt *logistische Abbildung*. Beweisen Sie, dass  $f$  und  $g$  topologisch konjugiert zueinander sind mittels des Homöomorphismus

$$h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad h : I \rightarrow I.$$

- (b) Zeigen Sie, dass  $(I, g)$  (und damit auch  $(I, f)$ ) ein topologischer Faktor von  $(S^1, F)$  ist, wobei  $F(z) = z^2$  die Winkelverdopplung bezeichnet. (Hinweis: Versuchen Sie eine möglichst einfache surjektive Abbildung  $h : S^1 \rightarrow I$  zu finden.)

### Aufgabe 3: Homöomorphismen des Einheitsintervalls

Sei  $f : I \rightarrow I$  ein streng monoton fallender Homöomorphismus des kompakten Einheitsintervalls  $I = [0, 1]$ . Beschreiben Sie das Verhalten der Trajektorien  $f^n(x)$  für alle  $x \in I$ .

### Aufgabe 4: Zeltabbildung

Wir betrachten nochmals die Zeltabbildung  $f : I \rightarrow I$ ,  $f(x) = 1 - |2x - 1|$ , aus Beispiel 3.3 der Vorlesung.

- (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die explizite Formel

$$f^n(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin |\sin(2^{n-1}\pi x)|$$

für die Iterierten von  $f$ .

- (b) Zeigen Sie, dass sich  $f^n$  auch darstellen lässt als

$$f^n(x) = \begin{cases} 2^n \left(x - \frac{2k}{2^n}\right) & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \\ 1 - 2^n \left(x - \frac{2k+1}{2^n}\right) & \text{für alle } x \in \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right] \end{cases},$$

wobei  $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ .

- (c) Beweisen Sie, dass die Punkte  $x \in I$  mit endlichem Vorwärtsorbit genau die rationalen Zahlen in  $I$  sind. Zeigen Sie weiter, dass deshalb nicht nur die Menge der periodischen, sondern auch die der schließlich periodischen Punkte dicht in  $I$  liegt.

## Blatt 3

### Aufgabe 1: Lineare Torus-Endomorphismen I

Sei  $(X, f)$  ein TDS mit der Eigenschaft, dass die Anzahl der  $n$ -periodischen Punkte für jedes  $n \geq 1$  endlich ist. Dann definieren wir

$$p(f) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \{1, \# \text{Per}_n(f)\},$$

wobei  $\# \text{Per}_n(f)$  die Anzahl der Elemente von  $\text{Per}_n(f)$  bezeichnet.

- (a) Sei  $f_A : T^n \rightarrow T^n$  ein linearer Torus-Endomorphismus. Wir setzen voraus, dass  $A$  hyperbolisch ist, d.h. dass die Eigenwerte von  $A$  alle betragsmäßig verschieden von Eins sind. Beschreiben Sie für diesen Fall  $p(f_A)$  mit Hilfe der Eigenwerte von  $A$ . Leiten Sie daraus eine notwendige Bedingung für die topologische Konjugiertheit zweier hyperbolischer Torus-Endomorphismen ab.
- (b) Zeigen Sie, dass  $p(f_A^{-1}) = p(f_A)$ , falls  $|\det A| = 1$ .
- (c) Zeigen Sie, dass die Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ , topologisch konjugiert zu einem linearen Torus-Endomorphismus auf  $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ist.

### Aufgabe 2: Lineare Torus-Endomorphismen II

Zeigen Sie, dass die Menge  $\text{Per}(f_A)$  der periodischen Punkte eines hyperbolischen linearen Torus-Endomorphismus dicht in  $T^n$  liegt, indem Sie folgendermaßen vorgehen:

- (a) Zeigen Sie, dass  $G_p := (p^{-1}\mathbb{Z}^n)/\mathbb{Z}^n$  für jedes  $p \in \mathbb{N}$  eine endliche Untergruppe von  $T^n$  ist.
- (b) Nun sei  $p$  eine natürliche Zahl, die teilerfremd zu  $\det A$  ist. Zeigen Sie, dass die Menge  $G_p$  vorwärtsinvariant und die Einschränkung  $f_A|_{G_p} : G_p \rightarrow G_p$  invertierbar ist. Was können Sie daraus über die periodischen Punkte von  $f_A$  folgern?
- (c) Betrachten Sie nun die Menge  $\bigcup_p G_p$ , wobei über alle  $p$  vereinigt wird, die teilerfremd zu  $\det A$  sind.

### Aufgabe 3: Rekurrenz

Bestimmen Sie die rekurrente Menge  $\mathcal{R}(f)$  in den folgenden Fällen:

- (a)  $f : I \rightarrow I$  Homöomorphismus des Einheitsintervalls.
- (b)  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = cz$ , Rotation auf dem Einheitskreis.

(c)  $f : X \rightarrow X$ ,  $X$  endliche Menge mit Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Können Sie in allen drei Fällen ein minimales Teilsystem bestimmen?

## Blatt 4

### Aufgabe 1: Linear induzierte Systeme auf der Einheitsphäre

Die Einheitsphäre im  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist gegeben durch

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\},$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Euklidische Norm bezeichnet, also  $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2)^{1/2}$ . Als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist  $S^n$  ein kompakter metrischer Raum. Die Metrik auf  $S^n$  ist einfach die entsprechende Einschränkung der Euklidischen Metrik. Sei  $A \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{R})$  eine invertierbare Matrix. Dann ist ein TDS  $(S^n, f_A)$  gegeben durch

$$f_A : S^n \rightarrow S^n, \quad x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}.$$

- (a) Bestimmen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $\text{Per}_n(f_A)$  der  $n$ -periodischen Punkte von  $f_A$ .
- (b) Nun nehmen wir an, dass die Jordan-Normalform von  $A$  nur aus einem einzigen Jordanblock zu einem reellen Eigenwert  $\lambda \neq 0$  besteht, also

$$A = QJ_AQ^{-1} \quad \text{mit} \quad J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{R}).$$

Wie sehen in diesem Fall die rekurrente und die nichtwandernde Menge von  $f_A$  aus? (Hinweis: Überlegen Sie sich, warum Sie annehmen können, dass  $A$  bereits in Jordan-Normalform gegeben ist und wie die Potenzen  $J_A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , aussehen.)

- (c) Nehmen Sie nun an, dass die (reelle) Jordan-Normalform von  $A$  aus einem (reellen) Jordanblock zu einem komplex konjugierten Eigenwertepaar besteht. Wie sehen in diesem Fall die rekurrente und die nichtwandernde Menge aus?

Haben Sie eine Vermutung für den allgemeinen Fall? Können Sie daraus eine notwendige Bedingung für die topologische Konjugiertheit zweier Abbildungen  $f_A$  und  $f_B$  ableiten?

### Aufgabe 2: Nichtwandernde Menge

- (a) Sei  $(X, f)$  ein TDS und  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra von  $X$  definiert ist. Ferner nehmen wir an, dass  $\mu$  auf den nichtleeren offenen Teilmengen von  $X$  positive Werte annimmt, und dass  $\mu$  invariant unter  $f$  ist, d.h.  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$  für jede Borel-Menge  $A \subset X$ . Zeigen Sie, dass dann  $\Omega(f) = X$  gilt.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die nichtwandernde Menge der Zeltabbildung.

### Aufgabe 3: $K$ -Basismengen

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  stetig und  $K \subset X$  kompakt. In Definition 4.20 haben wir auf  $\mathcal{C}(K, f)$  die folgende Relation eingeführt:  $x \sim y$  genau dann, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine periodische  $\varepsilon$ -Kette existiert, die  $x$  und  $y$  enthält. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und die Äquivalenzklasse eines Punktes  $x \in \mathcal{C}(K, f)$  durch  $\text{ch}(x, x, K, f)$  gegeben ist.

### Aufgabe 4: Kettentransitivität

Sei  $(X, f)$  ein TDS. Eine abgeschlossene Teilmenge  $Y \subset X$  heißt *kettentransitiv*, falls zu je zwei Punkten  $x, y \in Y$  für jedes  $\varepsilon > 0$  eine  $\varepsilon$ -Kette von  $x$  nach  $y$  existiert, d.h. eine  $\varepsilon$ -Kette der Form  $(x, z_1, \dots, z_m, y)$ . Dabei müssen die Punkte  $z_i$  nicht in  $Y$  liegen. Zeigen Sie, dass jede wegzusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von  $\mathcal{C}(f)$  kettentransitiv ist. (Zur Erinnerung: Eine Teilmenge  $Y \subset X$  heißt wegzusammenhängend, falls zu je zwei Punkten  $x, y \in Y$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  existiert mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .)

## Blatt 5

### Aufgabe 1: Linear induzierte Systeme auf der Einheitssphäre II

Wir betrachten nochmals ein System der Form  $(S^n, f_A)$  mit  $A \in \text{Gl}(n+1, \mathbb{R})$ , wie in Aufgabe 1 auf Blatt 4. Wir nehmen an, dass die Jordan-Normalform von  $A$  aus einem einzigen Jordanblock zu einem reellen Eigenwert besteht. Bestimmen Sie in diesem Fall die kettenrekurrente Menge  $\mathcal{C}(f_A)$  mit einem ähnlichen Argument wie in Beispiel 4.16 der Vorlesung.

### Aufgabe 2: Folgenräume

- (a) Beweisen Sie Lemma 5.2 der Vorlesung: Für alle  $x, y \in \Sigma_{N,+}$  gilt:
- (i) Falls  $x_k = y_k$  für  $k = 0, \dots, n$ , dann ist  $d_{2,+}(x, y) \leq 2^{-n}$ .
  - (ii) Falls  $d_{2,+}(x, y) < 2^{-n}$ , dann ist  $x_k = y_k$  für  $k = 0, \dots, n$ .
- (b) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Lemma für  $\Sigma_N$ .

### Aufgabe 3: Expansivität I

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Die Eigenschaft der (positiven) Expansivität bleibt unter topologischer Konjugation erhalten, d.h. sind  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  topologisch konjugierte TDSe, so ist  $f$  (positiv) expansiv genau dann, wenn  $g$  (positiv) expansiv ist.
- (b) Ist  $(X, f)$  ein TDS und  $f$  positiv expansiv mit Expansivitäts-Konstante  $\delta > 0$ , so ist jede Abbildung  $h : X \rightarrow X$ , die mit  $f$  kommutiert und  $d(h(x), x) < \delta$  für alle  $x \in X$  erfüllt, bereits die Identität.

#### Aufgabe 4: Expansivität II

Sei  $(X, f)$  ein TDS. Die Abbildung  $f$  heißt *expandierend*, falls es Konstanten  $\varepsilon > 0$  und  $\lambda > 1$  gibt, so dass

$$d(f(x), f(y)) \geq \lambda d(x, y)$$

gilt, falls  $d(x, y) < \varepsilon$ ,  $x, y \in X$ .

- (a) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Eigenschaft, expandierend zu sein, keine topologische Eigenschaft ist, d.h. sind  $(X, f)$  und  $(Y, g)$  TDSe, so dass  $f$  expandierend ist, so muss  $g$  nicht notwendigerweise expandierend sein.
- (b) Zeigen Sie, dass jede expandierende Abbildung positiv expansiv ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Winkelverdopplung  $f : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^2$ , bezüglich der "runden Metrik" auf  $S^1$  (Abstand = Länge des kleineren Kreisbogens zwischen den zwei Punkten) expandierend ist.

### Blatt 6

#### Aufgabe 1: Basen und Subbasen einer Topologie

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{O}$  das zugehörige System der offenen Mengen in  $X$  (die Topologie von  $X$ ). Eine *Basis* von  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ , so dass jedes  $O \in \mathcal{O}$  Vereinigung von Mengen in  $\mathcal{B}$  ist. Eine *Subbasis* von  $\mathcal{O}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ , so dass jedes  $O \in \mathcal{O}$  Vereinigung von endlichen Schnitten von Elementen von  $\mathcal{S}$  ist.

- (a) Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{S}$  ein System von Teilmengen von  $X$ , deren Vereinigung ganz  $X$  ist. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Topologie auf  $X$  gibt, so dass  $\mathcal{S}$  eine Subbasis dieser Topologie ist.
- (b) Seien  $X_i$ ,  $i \in I$ , topologische Räume, wobei  $I$  eine beliebige Indexmenge ist. Das Produkt der  $X_i$  ist die Menge

$$X := \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\},$$

wobei  $\coprod_{i \in I} X_i$  die disjunkte Vereinigung der  $X_i$  bezeichnet. Ist  $p_i : X \rightarrow X_i$ ,  $f \mapsto f(i)$ , für jedes  $i \in I$  die Projektion auf  $X_i$ , so ist die Produkttopologie auf  $X$  die eindeutige Topologie, die von der Subbasis

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U) : U \subset X_i \text{ offen, } i \in I\}$$

erzeugt wird. Zeigen Sie, dass  $X$  total unzusammenhängend ist, falls alle der Räume  $X_i$  total unzusammenhängend sind.

### Aufgabe 2: Kompaktheit der Folgenräume

Beweisen Sie die Kompaktheit des metrischen Raums  $(\Sigma_N, d_\lambda)$  ohne den Satz von Tychonoff, sondern indem Sie mit Hilfe der Metrik  $d_\lambda$  zeigen, dass jede Folge in  $\Sigma_N$  einen Häufungswert hat.

### Aufgabe 3: Topologische Markov-Ketten mit dichten Orbits

In dieser Aufgabe geht es darum die Existenz von dichten Vorwärtsorbits für eine topologische Markov-Kette  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  zu charakterisieren. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass für jedes  $i \in \{1, \dots, N\}$  die Menge  $\Sigma_{A,i} := \{x \in \Sigma_A : x_0 = i\}$  nichtleer ist.
- Zeigen Sie, dass falls es eine Folge  $x \in \Sigma_A$  gibt, die das Symbol  $i$  mindestens zweimal enthält, es ein periodisches Element  $x' \in \Sigma_A$  gibt mit  $x'_0 = i$ .
- Wir nennen die Symbole  $i$ , die mindestens zweimal in einer Folge  $x \in \Sigma_A$  vorkommen, *essentiell*. Zeigen Sie, dass jede  $\omega$ -Limesmenge eines beliebigen Elements von  $\Sigma_A$  nur essentielle Symbole enthält.
- Zwei essentielle Symbole  $i$  und  $j$  heißen äquivalent, falls es  $x, x' \in \Sigma_A$  gibt und  $k_1 < k_2$ ,  $l_1 < l_2$ , so dass

$$x_{k_1} = x'_{l_2} = i, \quad x_{k_2} = x'_{l_1} = j.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und sich damit die Menge der essentiellen Symbole aufspaltet in disjunkte Teilmengen von paarweise äquivalenten Symbolen.

- Zeigen Sie, dass es einen Punkt  $x \in \Sigma_A$  mit  $\omega(x, \sigma_A) = \Sigma_A$  genau dann gibt, wenn alle Symbole in  $\Sigma_A$  äquivalent sind.

### Aufgabe 4 (★): Beispiel für $\overline{\mathcal{R}(f)} \neq \Omega(f)$

- Zeigen Sie, dass es für jedes  $n \geq 1$  einen Subshift  $f = \sigma_2|_S$  gibt, so dass die iterierten nichtwandernden Mengen  $\Omega_k(f)$  (siehe Bemerkung 4.9) paarweise verschieden sind für  $k = 1, \dots, n$ , aber  $\Omega_{n+1}(f) = \Omega_n(f)$ .
- Folgern Sie aus (a), dass im Allgemeinen der Abschluss der rekurrenten Menge nicht mit der nichtwandernden Menge übereinstimmt.

## Blatt 7

### Aufgabe 1: Topologische Transitivität

Sei  $(X, f)$  ein TDS. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildung  $f$  ist genau dann topologisch transitiv, wenn für jedes Paar nichtleerer offener Mengen  $U, V \subset X$  ein  $n \geq 1$  existiert mit  $f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- (b) Ist  $f$  topologisch transitiv und  $X$  perfekt, so gilt für die rekurrente Menge  $\overline{\mathcal{R}(f)} = X$ . Gilt dies auch, wenn  $X$  nicht perfekt ist?

### Aufgabe 2: Topologische Transitivität für Intervallabbildungen

- (a) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine stetige und stückweise (affin) lineare Abbildung mit  $f(0) = 1/2$ ,  $f(1/4) = 1$ ,  $f(1/2) = 1/2$  und  $f(1) = 0$ . Auf den Intervallen  $[0, 1/4]$ ,  $[1/4, 1/2]$  und  $[1/2, 1]$  ist die Abbildung affin linear. Zeigen Sie, dass  $f$  topologisch transitiv ist, aber nicht  $f^2$ . (Hinweis: Machen Sie sich klar, dass die Trajektorien von  $f$  zwischen den Teilintervallen  $[0, 1/2]$  und  $[1/2, 1]$  hin und her springen. Plotten Sie die Graphen von einigen der Iterierten  $f^{2n}$ , um die Dynamik auf diesen Teilintervallen zu verstehen.)
- (b) Was gilt im Vergleich dazu für die Zeltabbildung?

### Aufgabe 3: Transitive topologische Markov-Ketten

Zeigen Sie: Ist die Transitionsmatrix  $A$  einer topologischen Markov-Kette transitiv, so ist  $\sigma_A$  topologisch mischend. (Hinweis: Sie können annehmen, dass die Mengen  $U$  und  $V$  Schnitte von symmetrischen Zylingermengen mit  $\Sigma_A$  sind. Schauen Sie sich nochmals den Beweis von Satz 5.26 im Skript an.)

### Aufgabe 4: Sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten

Zeigen Sie, dass sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten eine Eigenschaft ist, die unter topologischer Konjugation erhalten bleibt. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass dies nicht der Fall ist, wenn der Zustandsraum nicht als kompakt vorausgesetzt wird.

## Blatt 8

### Aufgabe 1: Chaos I

- (a) Geben Sie ein Beispiel für ein TDS  $(X, f)$ , so dass  $f$  topologisch transitiv ist, die periodischen Punkte von  $f$  dicht in  $X$  liegen, aber  $f$  keine sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten hat.

- (b) Geben Sie ein Beispiel für ein TDS  $(X, f)$ , so dass die periodischen Punkte von  $f$  dicht in  $X$  liegen,  $f$  sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten hat, aber  $f$  nicht topologisch transitiv ist.
- (c) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein nicht notwendig kompakter metrischer Raum ist, so dass  $f$  topologisch transitiv ist, sensitive Abhängigkeit von Anfangswerten hat, aber die periodischen Punkte von  $f$  nicht dicht in  $X$  liegen.

### Aufgabe 2: Chaos II

- (a) Geben Sie ein Beispiel an für eine Semikonjugation  $h : X \rightarrow Y$  zwischen zwei TDSen  $(X, f)$  und  $(Y, g)$ , so dass  $(X, f)$  chaotisch ist, aber nicht  $(Y, g)$ .
- (b) Geben Sie ein Beispiel an für eine Semikonjugation  $h : X \rightarrow Y$  zwischen zwei TDSen  $(X, f)$  und  $(Y, g)$ , so dass  $(Y, g)$  chaotisch ist, aber nicht  $(X, f)$ .

### Aufgabe 3: Skalierte Zeltabbildung

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die natürliche Fortsetzung der Standard-Zeltabbildung, d.h.

$$f(x) = 1 - |2x - 1| = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{für } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Für jedes  $\mu > 1$  betrachten wir die skalierte Zeltabbildung  $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\mu(x) = \mu f(x)$ . Zeigen Sie, dass es wie im Fall  $\mu = \frac{3}{2}$  für jedes  $\mu > 1$  eine maximale total invariante Menge  $\Lambda_\mu \subset [0, 1]$  gibt, die kompakt, perfekt und total unzusammenhängend ist.

## Blatt 9

### Aufgabe 1: Überdeckungen

Beweisen Sie Lemma 7.1 der Vorlesung: Sei  $(X, f)$  ein TDS. Dann gilt:

- (i) Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so auch  $f^{-1}\mathcal{U} := \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ . Ferner gilt  $H(f^{-1}\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{U})$ . Ist  $f$  surjektiv, so gilt die Gleichheit.
- (ii) Sind  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  offene Überdeckungen von  $X$ , so auch  $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ .
- (iii) Die Operation  $\vee$  ist kommutativ und assoziativ, und es gilt  $H(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq H(\mathcal{U}) + H(\mathcal{V})$ .

- (iv) Seien  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  offene Überdeckungen von  $X$ , so dass jedes Element von  $\mathcal{V}$  in einem von  $\mathcal{U}$  enthalten ist. Dann nennen wir  $\mathcal{V}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  und schreiben  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ . Es gilt in diesem Fall  $H(\mathcal{U}) \leq H(\mathcal{V})$ .

### Aufgabe 2: Bowen-Metriken

Ist  $(X, f)$  ein TDS, so sind die Bowen-Metriken definiert als

$$d_{n,f}(x, y) := \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $d_{n,f}$  für jedes  $n$  eine Metrik auf  $X$  ist, die dieselbe Topologie erzeugt wie  $d$ . Ist  $d_{n,f}$  auch äquivalent im metrischen Sinne, d.h. gibt es Konstanten  $0 < c \leq C < \infty$ , so dass  $cd(x, y) \leq d_{n,f}(x, y) \leq Cd(x, y)$ ?

### Aufgabe 3: Topologische Entropie

Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Der Durchmesser von  $\mathcal{U}$  ist definiert als

$$D(\mathcal{U}) := \sup_{U \in \mathcal{U}} D(U), \quad D(U) := \sup_{x, y \in U} d(x, y).$$

Nun sei  $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von offenen Überdeckungen von  $X$  mit  $D(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie, dass für jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$  gilt:

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, \mathcal{U}_n).$$

## Blatt 10

### Aufgabe 1: Kommutativität der topologischen Entropie

Seien  $X, Y$  kompakte metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen. Dann sind  $(X, g \circ f)$  und  $(Y, f \circ g)$  TDS. Zeigen Sie, dass

$$h(g \circ f) = h(f \circ g).$$

### Aufgabe 2: Systeme mit unendlicher Entropie

- (a) Finden Sie eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  und  $h(f) > 0$ . (Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die topologische Entropie der Zeltabbildung  $\log 2$  ist.)
- (b) Konstruieren Sie unter Verwendung von (a) und folgender Eigenschaften der topologischen Entropie eine stetige Abbildung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit unendlicher topologischer Entropie:

- (1) Für jedes TDS  $(X, f)$  gilt  $h(f^n) = n \cdot h(f)$  für alle  $n \geq 0$ .

- (2) Die topologische Entropie bleibt unter topologischer Konjugation erhalten.
- (3) Für ein TDS  $(X, f)$  gilt

$$h(f) = \max_{i=1}^n h(f|_{X_i}),$$

falls  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ , wobei die Mengen  $X_i$  abgeschlossen und vorwärtsinvariant sind.

### Aufgabe 3: Homöomorphismen auf dem Einheitskreis

Zeigen Sie, dass jeder Homöomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  topologische Entropie Null hat. (Hinweis: Betrachten Sie eine maximale  $(n, \varepsilon)$ -separierte Menge  $E = \{z_1, \dots, z_k\}$ , wobei  $z_j = e^{2\pi i \varphi_j}$  und  $\varphi_1 < \dots < \varphi_k$ . Die Intervalle  $f^j([z_i, z_{i+1}])$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ , und  $f^j([z_k, z_1])$  bilden für jedes  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  eine (bis auf Randpunkte) disjunkte Zerlegung von  $S^1$ . Was folgt daraus für die Kardinalität  $k$  von  $E$ ?)

## Blatt 11

### Aufgabe 1: Aufspannende und separierte Mengen

Zeigen Sie, dass man den gleichen Wert für die topologische Entropie erhält, wenn man in der Definition mittels  $(n, \varepsilon)$ -aufspannenden Mengen die strikte Ungleichung  $< \varepsilon$  durch  $\leq \varepsilon$  ersetzt, und ebenso, wenn man in der Definition mittels  $(n, \varepsilon)$ -separierter Mengen die Ungleichung  $\geq \varepsilon$  durch  $> \varepsilon$  ersetzt.

### Aufgabe 2: Fraktal-Dimension

- (a) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden elementaren Eigenschaften der Fraktal-Dimension:
- (1)  $\dim_F(A) \leq \dim_F(B)$ , falls  $A \subset B \subset X$ , wobei  $A$  und  $B$  kompakte Teilmengen von  $X$  sind.
  - (2)  $\dim_F(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \max_{i=1}^n \dim_F(A_i)$ , wenn  $A_1, \dots, A_n \subset X$  kompakte Teilmengen von  $X$  sind.
  - (3) Ist  $A \subset X$  eine endliche Menge, so gilt  $\dim_F(A) = 0$ .
  - (4) Ist  $(Y, d')$  ein weiterer metrischer Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine Bijektion, so dass  $f$  und  $f^{-1}$  Lipschitz-stetig sind, so gilt  $\dim_F(A) = \dim_F(f(A))$  für alle kompakten Mengen  $A \subset X$ .
- (b) Zeigen Sie, dass die Fraktal-Dimension der kompakten Menge

$$K := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \subset \mathbb{R}$$

gleich  $1/2$  ist.

### Aufgabe 3: Abschätzung der Entropie von Torus-Endomorphismen

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 7.17, dass für einen beliebigen Torus-Endomorphismus  $f_A : T^n \rightarrow T^n$  die Abschätzung

$$h(f_A) \leq n \cdot \max\{0, \log r(A)\}$$

gilt, wobei  $r(A)$  den Spektralradius der Matrix  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  bezeichnet, also den Betrag des betragsgrößten Eigenwerts.

### Aufgabe 4: Topologische Entropie eines beidseitigen Subshifts

Sei  $(S, \sigma_N|_S)$  ein Subshift. Zeigen Sie, dass die topologische Entropie von  $\sigma_N|_S$  gegeben ist durch

$$h(\sigma_N|_S) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log w_n,$$

wobei  $w_n$  die Anzahl der zulässigen Wörter der Länge  $n$  bezeichnet.

## Literatur

- [1] L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz: *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 5. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.
- [2] B. Aulbach, B. Kieninger: *On three definitions of chaos*. Nonlinear Dyn. Syst. Theory 1, no. 1, 23–37 (2001).
- [3] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey: *On Devaney's definition of chaos*. Amer. Math. Monthly 99, no. 4, 332–334 (1992).
- [4] R. Bowen: *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*. Trans. Am. Math. Soc. 153, pp. 401–414 (1971).
- [5] R. Bowen: *Erratum to "Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces"*. Trans. Am. Math. Soc. 181, pp. 509–510 (1973).
- [6] R. Easton: *Geometric methods for discrete dynamical systems*. Oxford Engineering Science Series, 50. Oxford University Press, New York, 1998.
- [7] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] S. Kolyada, L. Snoha: *Some aspects of topological transitivity – a survey*. Iteration theory (ECIT 94) (Opava), 3–35, Grazer Math. Ber., 334, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1997.
- [9] T. Y. Li, J. A. Yorke: *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly 82, no. 10, 985–992 (1975).

- [10] W. Metzler: *Nichtlineare Dynamik und Chaos. Eine Einführung.* Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks] B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [11] C. Robinson: *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.